Բանաձևի կատարյալ նորմալ ձևերի միակությունը

Առաքելյան Աշոտ

Հանգուցային բառեր. *տրամաբանական բանաձև, տրամաբանական օրենք, տարրական արտադրյալների գումար, տարրական գումարների արտադրյալ, բանաձևի դիզյունկտիվ նորմալ ձև, բանաձևի կոնյունկտիվ նորմալ ձև, բանաձևի կատարյալ դիզյունկտիվ նորմալ ձև, բանաձևի կատարյալ կոնյունկտիվ նորմալ ձև*

Աշխատանքը նվիրված է ասույթների հանրահաշվի բանաձևի կատարյալ նորմալ ձևերի միակության հիմնավորմանը:

Պայմանավորվենք $\Omega_1 \vee \Omega_2 \vee \cdots \vee \Omega_n$ տեսքի բանաձևն անվանել $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ բանաձևերի գումար, իսկ $\Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge \cdots \wedge \Omega_n$ տեսքի բանաձևը՝ արտադրյալ:

Մասնավոր դեպքում, երբ բոլոր Ω_i գումարելիները ատոմներ են (այսինքն լատինական այբուբենի մեծատառեր են, որոնց փոխարեն կարելի է տեղադրել կամայական ասույթ) կամ ատոմների ժխտումներ, անվանել համապատասխանաբար տարրական գումար և տարրական արտադրյալ:

Հիշենք, որ նույնաբար ճշմարիտ բանաձև է կոչվում այնպիսի բանաձևը, որն իր մեջ մտնող ատոմների ցանկացած արժեքների դեպքում ճշմարիտ է (ընդունում է «1» արժեք): Բանաձևը կոչվում է նույնաբար կեղծ, եթե այն իր մեջ մտնող ատոմների բոլոր արժեքների դեպքում կեղծ է (ընդունում է «0» արժեք):

Թեորեմ 1. Որպեսզի տարրական գումարը լինի նույնաբար ճշմարիտ բանաձև, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա մեջ ինչ-որ ատոմ մասնակցի իր ժխտման հետ միասին:

Δ Բավարարություն: Ենթադրենք որևէ Γ տարրական գումարի մեջ X ատոմը մտնում է իր ժխտման հետ միասին, այսինքն Γ-ի տեսքն է $X \vee \overline{X} \vee \Pi$, որտեղ Π –ն ինչ-որ բանաձև է կամ կարող է ընդհանրապես չլինել:

Համաձայն $X \vee \overline{X} \sim 1$ օրենքի՝ $X \vee \overline{X}$ -ը նույնաբար ճշմարիտ բանաձև է: Ուստի Γ -ն ևս նույնաբար ճշմարիտ բանաձև է՝ ըստ $\vee$ -ի սահմանման:

Անհրաժեշտություն: Ենթադրենք հակառակը. գոյություն ունի ինչ-որ Γ' տարրական գումար, որը նույնաբար ճշմարիտ է, սակայն չի պարունակում ատոմ իր ժխտման հետ միասին: Γ' -ի մեջ ժխտում չպարունակող բոլոր ատոմներին տանք «0» արժեք, իսկ ժխտում պարունակող բոլոր ատոմներին՝ «1» արժեք: Արդյունքում Γ' -ը կընդունի «0» արժեք – հակասություն: ∇

Համանման ձևով ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը, որով լուծվում է տարրական արտադրյալների նույնաբար կեղծ լինելու հարցը:

Թեորեմ 2. Որպեսզի տարրական արտադրյալը լինի նույնաբար կեղծ բանաձև, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա մեջ ինչ-որ ատոմ մասնակցի իր ժխտման հետ միասին:

Այնպիսի գումարը, որի բոլոր գումարելիները տարրական արտադրյալներ են, կոչվում է տարրական արտադրյալների գումար:

Այնպիսի արտադրյալը, որի բոլոր արտադրիչները տարրական գումարներ են, կոչվում է տարրական գումարների արտադրյալ:

Օրինակներ,

1. n գումարելի պարունակող կամայական տարրական գումարը տարրական գումարների արտադրյալ է՝ մեկ արտադրիչ ունեցող: Այն միաժամանակ տարրական արտադրյալների գումար է, որը ունի n գումարելի՝ յուրաքանչյուրը մեկ արտադրիչ ունեցող:

2. n արտադրիչ պարունակող կամայական տարրական արտադրյալը տարրական արտադրյալների գումար է՝ մեկ գումարելի ունեցող: Այն միաժամանակ տարրական գումարների արտադրյալ է, որը ունի n արտադրիչ՝ յուրաքանչյուրը մեկ գումարելի ունեցող:

Տրված Ω բանաձևի դիզյունկտիվ նորմալ ձև (կարճ՝ ԴՆՁ) է կոչվում այնպիսի Ω_d բանաձևը, որը համասարազոր է Ω -ին և իրենից ներկայացնում է տարրական արտադրյալների գումար:

Թեորեմ 3. Ցանկացած բանաձև ունի ԴՆՁ:

Δ Ենթադրենք Ω-ն կամայական բանաձև է և նախապես ներկայացված է այնպիսի տեսքով, որի մեջ $\wedge$, $\vee$, ու ժխտում շաղկապներից բացի այլ շաղկապ չի մասնակցում, ընդ որում, ժխտման նշանները դրված են միայն առանձին ատոմների վրա (այսուհետև հանդիպող բոլոր թեորեմների մեջ ևս բանաձևերը նախապես ներկայացված են այդպիսի տեսքով): Եթե Ω-ն տարրական գումար է, կամ Ω-ի մեջ չկան տարրական գումարներ հանդիսացող արտադրիչներ, ապա հենց սկզբից Ω-ն ԴՆՁ է: Իսկ եթե Ω-ն ունի տարրական գումարներ հանդիսացող արտադրիչներ, որոնք բազմապատկված են նույնպիսի արտադրիչներով կամ ատոմներով կամ էլ ատոմների ժխտումներով, ապա կիրառելով դիստրիբուտիվության առաջին օրենքը՝ այդպիսի բոլոր փակագծերը կբացենք: Արդյունքում կստանանք Ω-ին համասարազոր բանաձև, որը տարրական արտադրյալների գումար է, այսինքն Ω-ի ԴՆՁ է: ∇

Տրված Ω բանաձևի կոնյունկտիվ նորմալ ձև (կարճ՝ ԿՆՁ) է կոչվում այնպիսի Ω_c բանաձևը, որը համասարազոր է Ω-ին և իրենից ներկայացնում է տարրական գումարների արտադրյալ:

Թեորեմ 4. Ցանկացած բանաձև ունի ԿՆՁ:

Δ Ենթադրենք Ω -ն կամայական բանաձև է: Նրա երկակի Ω^* բանաձևը, ըստ թեորեմ 3 -ի, ունի ԴՆՁ, որը նշանակենք $\Omega^*{}_d$: Քանի որ $\Omega^*{}_d$ -ն տարրական արտադրյալների գումար է, ապա նրա $(\Omega^*{}_d)^*$ երկակին կլինի տարրական գումարների արտադրյալ:

Մյուս կողմից, քանի որ $\Omega^* \equiv \Omega^*{}_d$, ապա, ըստ երկակիության օրենքի, կունենանք

$(\Omega^*)^* \equiv (\Omega^*{}_d)^*$, այսինքն $\Omega \equiv (\Omega^*{}_d)^*$:

Այսպիսով $(\Omega^*{}_d)^*$ բանաձևը տրված Ω բանաձևի ԿՆՁ է: ∇

Որպես օրինակ ստանանք $X\overline{\overline{YZ}}(V \vee W)$ բանաձևի ԴՆՁ և ԿՆՁ:

Ըստ $\overline{XY} \sim \overline{X} \vee \overline{Y}$ և $\overline{\overline{X}} \sim X$ օրենքների՝ ստանում ենք տրված բանաձևի ԿՆՁ $X(Y \vee \overline{Z})(V \vee W)$: Այն, ըստ $X(Y \vee Z) \sim XY \vee XZ$ օրենքի, համասարազոր է $(XY \vee X\overline{Z})(V \vee W)$ բանաձևին, այնուհետև՝ $XYV \vee XYW \vee X\overline{Z}V \vee X\overline{Z}W$ բանաձևին, որը տրված բանաձևի ԴՆՁ է:

Նշենք, որ բանաձևի բոլոր ԴՆՁ-երը և ԿՆՁ-երը միմյանց համասարազոր են, որովհետև դրանք բոլորը համասարազոր են տրված բանաձևին:

Թեորեմ 5. Որպեսզի բանաձևը լինի նույնաբար ճշմարիտ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա ցանկացած ԿՆՁ-ի յուրաքանչյուր արտադրիչ պարունակի ինչ-որ ատոմ՝ իր ժխտման հետ միասին:

ΔՏրված Ω բանաձևի նույնաբար ճշմարիտ լինելը համարժեք է նրա որևէ Ω_c ԿՆՁ-ի նույնաբար ճշմարիտ լինելուն, որովհետև $\Omega_c \equiv \Omega$: Քանի որ Ω_c-ն արտադրյալ է, ապա Ω_c-ի նույնաբար ճշմարիտ լինելը համարժեք է նրա յուրաքանչյուր արտադրիչի (որը տարրական գումար է) նույնաբար ճշմարիտ լինելուն: Մնում է օգտվել թեորեմ 1-ից: ∇

Համանման ձևով ապացուցվում է հետևյալ փաստը.

Թեորեմ 6. Որպեսզի բանաձևը լինի նույնաբար կեղծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա ցանկացած ԴՆՁ -ի յուրաքանչյուր գումարելի պարունակի ինչ-որ ատոմ՝ իր ժխտման հետ միասին:

Բանաձևի և՛ ԴՆՁ -երը, և՛ ԿՆՁ -երը միակը չեն: Բանաձևի նորմալ ձևերից առանձնապես կարևոր են այսպես կոչված կատարյալ նորմալ ձևերը:

Տրված Ω ոչ նույնաբար կեղծ բանաձևի կատարյալ դիզյունկտիվ նորմալ ձև (կարճ՝ ԿԴՆՁ) է կոչվում նրա այնպիսի ԴՆՁ -ն, որը բավարարում է հետևյալ 4 պահանջներին.

1. նրա մեջ չպետք է լինեն երկու միանման գումարելիներ,
2. ոչ մի գումարելի չպետք է պարունակի երկու միանման արտադրիչներ,
3. ոչ մի գումարելի չպետք է պարունակի ինչ-որ ատոմ և նրա ժխտումը,

4. նրա յուրաքանչյուր գումարելի պետք է պարունակի բանաձևի մեջ եղած բոլոր ատոմները կամ նրանց ժխտումները:

Ցույց տանք, որ ցանկացած ոչ նույնաբար կեղծ Ω բանաձևի համար կարելի է չորս պահանջներն էլ կատարել: Նախ ենթադրենք, որ Ω -ն արդեն բերված է ԴՆՁ տեսքի՝ համաձայն թեորեմ 3 -ի:

Սկսենք չորրորդ պահանջից: Եթե Ω բանաձևի ինչ-որ Γ գումարելի չի պարունակում, ասենք թե, X_1 ատոմը և նրա ժխտումը, ապա Γ-ն կփոխարինենք $X_1\Gamma \vee \overline{X}_1\Gamma$ բանաձևով: Դրա իրավունքը ունենք, քանի որ ըստ $(Y \vee Z)X \sim YX \vee ZX$, $X \vee \overline{X} \sim 1$ և $1X \sim X$ օրենքների՝

$$X_1\Gamma \vee \overline{X}_1\Gamma \equiv (X_1 \vee \overline{X}_1)\Gamma \equiv \Gamma:$$

Այնուհետև, օգտվելով $X \vee X \sim X$ օրենքից, Ω -ի ստացված տեսքում կրկնվող գումարելիները արտաքսում ենք՝ ապահովելով առաջին պահանջը:

Դրանից հետո օգտվելով $XX \sim X$ օրենքից՝ Ω -ի ստացված տեսքի բոլոր գումարելիներից կարտաքսենք կրկնվող արտադրիչները՝ ապահովելով երկրորդ պահանջը:

Վերջապես դեն կգցենք այդպիսի գումարելիները, որոնք պարունակում են ինչ-որ ատոմ՝ իր ժխտման հետ միասին: Դրա իրավունքը ունենք շնորհիվ $X\overline{X} \sim 0$, $X0 \sim 0$ և $X \vee 0 \sim X$ օրենքների: Դրանով ապահոված կլինենք նաև երրորդ պահանջը:

Այսպիսով ապացուցվեց հետևյալ փաստը:

Թեորեմ 7. Ցանկացած ոչ նույնաբար կեղծ բանաձև ունի ԿԴՆՁ:

Անցնենք միակությանը:

Թեորեմ 8. Ցանկացած ոչ նույնաբար կեղծ բանաձևի ԿԴՆՁ-ն միակն է:

Δ Ենթադրենք հակառակը. ինչ-որ $\Omega = \Omega(X_1; X_2; \ldots; X_n)$ ոչ նույնաբար կեղծ բանաձև ունի Ω' և Ω'' ԿԴՆՁ -եր՝ իրարից տարբեր: Ուստի դրանցից մեկում, ասենք թե Ω' -ում, կա գումարելի, որը Ω'' -ում չկա: Այդ գումարելին թող լինի

$X'_1 X'_2 \cdots X'_n$ (1), որտեղ $X'_i = X_i$ կամ $X'_i = \overline{X}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$:

Ω' և Ω'' բանաձևերում բոլոր $X_1; X_2; \ldots; X_n$ ատոմներին տանք արժեքներ հետևյալ սկզբունքով. X_i ատոմին տանք «1» արժեք, եթե (1) -ում $X'_i = X_i$; և X_i -ին տանք «0» արժեք, եթե (1) -ում $X'_i = \overline{X}_i$:

Արդյունքում Ω' -ի (1) գումարելին կընդունի «1» արժեք, և հետևաբար Ω' -ը ևս կընդունի «1» արժեք: Մինչդեռ Ω'' -ը կընդունի «0» արժեք, որովհետև նրա բոլոր գումարելիները, լինելով (1) –ից տարբեր, կունենան գոնե մեկ «0» արտադրիչ: Այսպիսով Ω' և Ω'' հավասարազոր բանաձևերը (դրանք երկուսը նույն բանաձևի ԴՆՁ-եր են) ատոմների որոշակի արժեքների դեպքում ընդունեցին տարբեր արժեքներ – հակասություն: ∇

Այստեղից բխում է, որ երկու ոչ նույնաբար կեղծ բանաձևեր հավասարազոր են այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանց ԿԴՆՁ -երը համընկնում են:

Նկատենք, որ բանաձևի ԿԴՆՁ տեսքը ստանալիս նախապես կարիք չկա իմանալ՝ այն նույնաբար կեղծ է թե ոչ: Եթե բանաձևը լինի նույնաբար կեղծ, ապա ըստ թեորեմ 6-ի, նրա ԴՆՁ -ի մեջ յուրաքանչյուր գումարելի կպարունակի ինչ-որ ատոմ՝ իր ժխտման հետ միասին, և հետևաբար երրորդ պահանջը կատարելիս բոլոր գումարելիները դեն կգցվեն և բանաձևի համար ԿԴՆՁ չենք ստանա:

Տրված Ω ոչ նույնաբար ճշմարիտ բանաձևի կատարյալ կոնյունկտիվ նորմալ ձև (կարճ՝ ԿԿՆՁ) է կոչվում նրա այնպիսի ԿՆՁ-ն, որը բավարարում է հետևյալ 4 պահանջներին.

1. նրա մեջ չպետք է լինեն երկու միանման արտադրիչներ,
2. ոչ մի արտադրիչ չպետք է պարունակի երկու միանման գումարելիներ,
3. ոչ մի արտադրիչ չպետք է պարունակի ինչ-որ ատոմ և նրա ժխտումը,
4. նրա յուրաքանչյուր արտադրիչ պետք է պարունակի բանաձևի մեջ եղած բոլոր ատոմները կամ նրանց ժխտումները:

Ցույց տանք, որ ցանկացած ոչ նույնաբար ճշմարիտ Ω բանաձևի համար կարելի է չորս պահանջներն էլ կատարել: Նախ ենթադրենք, որ Ω -ն արդեն բերված է ԿՆՁ տեսքի՝ համաձայն թեորեմ 4 -ի:
Սկսենք չորրորդ պահանջից: Եթե Ω -ի ինչ-որ Γ արտադրիչ չի պարունակում, ասենք թե, X_1 ատոմը և նրա ժխտումը, ապա Γ-ն կփոխարինենք $(X_1 \vee \Gamma)(\overline{X}_1 \vee \Gamma)$ բանաձևով: Դրա իրավունքը ունենք, քանի որ ըստ $YZ \vee X \sim (Y \vee X)(Z \vee X)$, $X\overline{X} \sim 0$ և $0 \vee X \sim X$ օրենքների՝

$$(X_1 \vee \Gamma)(\overline{X}_1 \vee \Gamma) \equiv X_1\overline{X}_1 \vee \Gamma \equiv \Gamma:$$

Այնուհետև, օգտվելով $XX \sim X$ օրենքից, Ω -ի ստացված տեսքում կրկնվող արտադրիչները կարտաքսենք՝ ապահովելով առաջին պահանջը:

Դրանից հետո օգտվելով $X \vee X \sim X$ օրենքից՝ Ω -ի ստացված տեսքի բոլոր արտադրիչներից կարտաքսենք կրկնվող գումարելիները՝ ապահովելով երկրորդ պահանջը:

Վերջապես դեն կգցենք բոլոր այդպիսի արտադրիչները, որոնք պարունակում են ինչ-որ ատոմ՝ նրա ժխտման հետ միասին: Դրա իրավունքը ունենք՝ շնորհիվ $X \vee \overline{X} \sim 1$, $X \vee 1 \sim 1$ և $X1 \sim X$ օրենքների: Դրանով ապահոված կլինենք նաև երրորդ պահանջը:

Այսպիսով ապացուցվեց հետևյալ փաստը:

Թեորեմ 9. Ցանկացած ոչ նույնաբար ճշմարիտ բանաձև ունի ԿԿՆՁ:

Անցնենք միակությանը.

Թեորեմ 10. Ցանկացած ոչ նույնաբար ճշմարիտ բանաձևի ԿԿՆՁ-ն միակն է:

ΔԵնթադրենք հակառակը. ինչ-որ $\Omega=\Omega(X_1;X_2;...;X_n)$ ոչ նույնաբար ճշմարիտ բանաձև ունի երկու իրարից տարբեր Ω' և Ω'' ԿԿՆՁ-եր: Ուստի դրանցից մեկում, ասենք թե Ω' -ում, կա արտադրիչ, որը Ω'' -ում չկա: Այդ արտադրիչը թող լինի

$X_1' \vee X_2' \vee \cdots \vee X_n'$ (2), որտեղ $X_i'=X_i$ կամ $X_i'=\overline{X}_i$, $i=1,2,...,n$:

Ω' և Ω'' բանաձևերում բոլոր $X_1;X_2;...;X_n$ ատոմներին տանք արժեքներ հետևյալ սկզբունքով. X_i ատոմին տանք «0» արժեք, եթե (2) -ում $X_i'=X_i$; և X_i -ին տանք «1» արժեք, եթե (2) -ում $X_i'=\overline{X}_i$:

Արդյունքում Ω' -ի (2) արտադրիչը կընդունի «0» արժեք, և հետևաբար Ω' -ը ևս կընդունի «0» արժեք: Մինչդեռ Ω'' -ի բոլոր արտադրիչները, լինելով (2)-ից տարբեր, կունենան գոնե մեկ հատ 1 գումարելի, և հետևաբար կընդունեն «1» արժեք: Արդյունքում Ω'' -ը ևս կընդունի «1» արժեք:

Այսպիսով Ω' և Ω'' հավասարազոր բանաձևերը (դրանք երկուսն էլ նույն Ω բանաձևի ԿՆՁ-եր են) ատոմների որոշակի արժեքների դեպքում ընդունեցին տարբեր արժեքներ – հակասություն: ∇

Այստեղից բխում է, որ երկու ոչ նույնաբար ճշմարիտ բանաձևեր հավասարազոր են այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանց ԿԿՆՁ-երը համընկնում են:

Նկատենք, որ բանաձևի ԿԿՆՁ տեսքը ստանալիս նախապես կարիք չկա իմանալ՝ այն նույնաբար ճշմարիտ է թե ոչ: Եթե բանաձևը լինի նույնաբար ճշմարիտ, ապա ըստ թեորեմ 5-ի, նրա ԿՆՁ-ի մեջ յուրաքանչյուր արտադրիչ կպարունակի ինչ-որ ատոմ՝ իր ժխտման հետ միասին, և հետևաբար երրորդ պահանջը կատարելիս բոլոր արտադրիչները դեն կգցվեն և բանաձևի համար ԿԿՆՁ չենք ստանա:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Ավետիսյան Ս. Հ., Մաթեմատիկական տրամաբանության հիմնական տարրերը, «Լույս», 1969.
2. Ершов Ю. Л., Палютин Е.А., Математическая логика, «Наука», 1987.
3. Новиков П. С., Элементы математической логики, «Наука», 1973.
4. Шенфилд Дж., Математическая логика, «Наука», 1975.

Единственность совершенных нормальных форм формулы

Аракелян Ашот

Резюме

Ключевые слова: *логическая формула, логический закон, сумма элементарных произведений, произведение элементарных сумм, дизъюнктивная нормальная форма формулы, конъюнктивная нормальная форма формулы, совершенная дизъюнктивная нормальная форма формулы, совершенная коньюнктивная нормальная форма формулы*

Работа посвящена доказательству единственности совершенной дизьюнктивной нормальной формы для формул алгебры высказываний и доказательству единственности совершенной коньюнктивной нормальной формы для формул алгебры высказываний. Сначала получены необходимые и достаточные условия тождественной истинности для сумм элементарных произведений. Получены также необходимые и достаточные условия тождественной истинности для произведений элементарных сумм. Затем доказывается существование дизъюнктивной нормальной формы для формул алгебры высказываний. Доказывается также существование коньюнктивной нормальной формы для формул алгебры высказываний. После этого доказывается существование совершенной дизьюнктивной нормальной формы для формул алгебры высказываний. Доказывается также существование совершенной коньюнктивной нормальной формы для формул алгебры высказываний. Описаны конструктивные шаги получения совершенной дизьюнктивной нормальной формы от дизьюнктивной нормальной формы для формул алгебры высказываний. Описаны также конструктивные шаги получения совершенной коньюнктивной нормальной формы от коньюнктивной нормальной формы для формул алгебры высказываний. Доказывается также единственность совершенной дизьюнктивной нормальной формы для формул алгебры высказываний. Доказывается единственность совершенной коньюнктивной нормальной формы для формул алгебры высказываний. Все это сопровождается соответствующими иллюстрирующимн примерами.

The Uniqueness of Perfect Normal Forms of the Formula

Arakelyan Ashot

Summary

Key words: *logical formula, logical law, sum of elementary products, product of elementary sums, disjunctive normal form of formula, conjunctive normal form of formula, perfect disjunctive normal form of formula, perfect conjunctive normal form of formula*

The work is devoted to the proof of the uniqueness of a perfect disjunctive normal form for propositional algebra formulas and to the proof of the uniquenss of a perfect conjunctive normal form for propositional algebra formulas. First, necessary and sufficient conditions of identical truth for the sums of elementary products are obtained. Necessary and sufficient conditions of identical truth for products of elementary sums are also obtained. Then we prove the existence of a disjunctive normal form for propositional algebra formulas. We also prove the existence of a conjunctive normal form for propositional algebra formulas. After that, the existence of a perfect disjunctive normal form for propositional algebra formulas. We also prove the existence of a perfect conjunctive normal form for propositional algebra formulas. The constructive steps of obtaining a perfect disjunctive normal form from a disjunctive normal form for propositional algebra formulas are described. Constructive steps of obtaining a perfect conjunctive normal form from a conjunctive normal form for propositional algebra formulas are also described. We also prove the uniqueness of a perfect disjunctive normal form for propositional algebra formulas. We prove the uniqueness of a perfect conjunctive normal form for propositional algebra formulas. All this is accompanied by relevant illustrative examples.