Ինտեգրալներ, որոնք ծնվում են պյութագորյան եռյակների արտադրյալով

Բաղդասարյան Ժորա
Բաղդասարյան Արևիկ

Հանգուցային բառեր. *աստիճան բարձրացնել, գումար, բանաձև, արտահայտություն, գործողություն, Նյուտոնի երկանդամ*

Ուղղանկյուն եռանկյունների բազմությունում մեր կողմից ներմուծվել է նրանց արտադրյալի, բնական և կոտորակային աստիճան բարձրացնելու գործողությունները [1, 25-35], [5, 35-45]: Բացահայտվել է ներմուծված գործողությունների մի շարք կիրառություններ: Ներկայացվող աշխատանքը նպատակ ունի ցուցադրել նշված գործողությունների կիրառության մեկ ուրիշ բնագավառ ևս, որը վերաբերում է մաթեմատիկական անալիզի դասընթացի ինտեգրալների բաժնին:

Պարզվում է, որ արտադրյալի և նրանց բնական ու կոտորակային աստիճան բարձրացնելու գործողությունների արդյունքները՝ ստացված բանաձևերը, հնարավորություն են տալիս կազմել, ներմուծել և հաշվել անորոշ ինտեգրալների երկու դասեր, որոնք դասական գրականության մեջ չեն հանդիպում: Օգտվելով [2, 38-45] աշխատանքի (A_7) և (A_8) բանաձևերից [1, 25-35] աշխատանքի (11) և (12) բանաձևերից՝ ներմուծել և հաշվել մի քանի տիպային անորոշ ինտեգրալներ:

Առաջին դասի կամ (1) կետում դիտարկված ինտեգրալների հաշվման համար օգտվում ենք որոշ տիպի գումարների հաշվման որոշակի մեթոդից, որը մենք ներմուծել և լուսաբանել ենք [4, 8-11] աշխատանքում:

Երկրորդ դասի կամ (2) կետում ներմուծված ինտեգրալների հաշվման համար օգտվում ենք [2, 38-45] աշխատանքի բանաձևերից:

1. Հաշվել ինտեգրալը.

$$\int\left\{\left(\frac{a^2+x^2}{2x}\right)^k + C_k^2\left(\frac{a^2+x^2}{2x}\right)^{k-2}\left(\frac{a^2-x^2}{2x}\right)^2 + C_k^4\left(\frac{a^2+x^2}{2x}\right)^{k-4}\left(\frac{a^2-x^2}{2x}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{a^2-x^2}{2x}\right)^k\right\}dx \qquad (1)$$

$a \in R,\ a \neq 0, 0 < x < a$ k-ն զույգ թիվ է:

Այս ինտեգրալը հաշվելու համար առաջին հայացքից թվում է, որ անհրաժեշտ է հաշվել գումարելիներից յուրաքանչյուրի ինտեգրալը և հաշվել նրանց գումարը, որը ենթադրում է որոշ դժվարություններ: Բայց օգտագործելով [1, 25-35] աշխատանքի (11) կամ (12) բանաձևերը, կարող ենք հաշվել ինտեգրալատակ արտահայտության գումարը, որն ունի բավականաչափ պարզ տեսք: Իրոք, եթե բերված ինտագրալը նշանակենք T_1-ով, ապա կունենանք. (1)-ին ինտեգրալը հետևյալ տեսքով.

$$T_1 = \int \frac{a^{2k} + x^{2k}}{2x^k} dx$$

Ուստի (1) ինտեգրալը կհաշվվի հետևյալ կերպ.

$$\int \frac{a^{2k} + x^{2k}}{2x^k} dx \equiv \frac{a^{2k}}{2}\int x^{-k}dx + \frac{1}{2}\int x^k dx = \frac{a^{2k}x^{-k+1}}{2(1-k)} + \frac{x^{k+1}}{2(k+1)} + C =$$

$$= \frac{(k+1)a^{2k}x + (1-k)x^{2k+1}}{2(1-k)(1+k)x^k} + C:$$

Առավել պարզ լինելու համար խնդրին մոտենանք հետևյալ կերպ.

Վերցրած ինտեգրալը նշանակեցինք T_1-ով և նրա հետ միաժամանակ վերցնենք T_2 օժանդակ «բարեկամ» ինտեգրալը

$$T_2 = \int \left\{ C_k^1 \left(\frac{a^2+x^2}{2x}\right)^{k-1} \left(\frac{a^2-x^2}{2x}\right) + C_k^3 \left(\frac{a^2+x^2}{2x}\right)^{k-3} \left(\frac{a^2-x^2}{2x}\right)^3 + \cdots + C_k^{k-(k-1)} \left(\frac{a^2+x^2}{2x}\right) \left(\frac{a^2-x^2}{2x}\right)^{k-1} \right\} dx \tag{2}$$

Դիտարկենք T_1 ևT_2 ինտեգրալների հանրահաշվական գումարը և տարբերությունը: Օգտվելով Նյուտոնի երկանդամի բանաձևերից՝ կունենանք

$$T_1 + T_2 = \int \left(\frac{a^2+x^2}{2x} + \frac{a^2-x^2}{2x}\right)^k dx = \int \frac{a^{2k}}{x^k} dx = a^{2k} \frac{x^{-k+1}}{1-k} = a^{2k} \frac{x^{1-k}}{1-k} + \alpha_1, \alpha_1 \in R \tag{3}$$

$$T_1 - T_2 = \int \left(\frac{a^2+x^2}{2x} - \frac{a^2-x^2}{2x}\right)^k dx = \int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + \alpha_2, \alpha_2 \in R \tag{4}$$

Կազմելով (3) և (4) առնչությունների գումարը և տարբերությունը՝ ստանում ենք T_1 և T_2 ինտեգրալների արժեքները հետևյալ օրենքներով.

$$T_1 = \int \frac{a^{2k}+x^{2k}}{2x^k} dx = \frac{a^{2k}x^{-k+1}}{2(1-k)} + \frac{x^{k+1}}{2(k+1)} + C_1;$$

$$T_2 = \int \frac{a^{2k}-x^{2k}}{2x^k} dx = \frac{a^{2k}x^{-k+1}}{2(1-k)} - \frac{x^{k+1}}{2(k+1)} + C_2$$

Հեշտ է համոզվել, որ T_1 և T_2 ինտեգրալների ինտեգրալատակ արտահայտությունները a^k էջով ծնված ուղղանկյուն եռանկյան մյուս երկու կողմերն են $\frac{a^{2k}-x^{2k}}{2x^k}$ էջով և $\frac{a^{2k}+x^{2k}}{2x^k}$ ներքնաձիգով:

Օրինակ 2. Հաշվել ինտեգրալը.

$$\int \left\{ \left(\frac{a^2+x^2}{2x}\right)^3 + 3\left(\frac{a^2+x^2}{2x}\right)\left(\frac{a^2-x^2}{2x}\right)^2 \right\} dx = \int \frac{a^6+x^6}{2x^3} dx = \frac{x^4}{8} - \frac{a^6}{4x^2} + C$$

Օրինակ 3. Հաշվել ինտեգրալները.

$$T_1 = \int \left\{ \left(\frac{\sqrt[n]{a^2}+\sqrt[n]{x^2}}{2\sqrt[n]{x}}\right)^n + C_n^2 \left(\frac{\sqrt[n]{a^2}+\sqrt[n]{x^2}}{2\sqrt[n]{x}}\right)^{n-2} \left(\frac{\sqrt[n]{a^2}-\sqrt[n]{x^2}}{2\sqrt[n]{x}}\right)^2 + C_n^4 \left(\frac{\sqrt[n]{a^2}+\sqrt[n]{x^2}}{2\sqrt[n]{x}}\right)^{n-4} \left(\frac{\sqrt[n]{a^2}-\sqrt[n]{x^2}}{2\sqrt[n]{x}}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{\sqrt[n]{a^2}-\sqrt[n]{x^2}}{2\sqrt[n]{x}}\right) \right\} dx = \int \frac{a^2+x^2}{2x} dx = \frac{a^2}{2}\ln|x| + \frac{1}{4}x^2 + C_1$$

$$T_2=\int\left\{C_n^1\left(\frac{\sqrt[n]{a^2}+\sqrt[n]{x^2}}{2\sqrt[n]{x}}\right)^{n-1}\left(\frac{\sqrt[n]{a^2}-\sqrt[n]{x^2}}{2\sqrt[n]{x}}\right)^1+C_n^3\left(\frac{\sqrt[n]{a^2}+\sqrt[n]{x^2}}{2\sqrt[n]{x}}\right)^{n-3}\left(\frac{\sqrt[n]{a^2}-\sqrt[n]{x^2}}{2\sqrt[n]{x}}\right)^3\right.$$

$$\left.+\cdots+C_n^{n-(n-1)}\left(\frac{\sqrt[n]{a^2}+\sqrt[n]{x^2}}{2\sqrt[n]{x}}\right)^1\left(\frac{\sqrt[n]{a^2}-\sqrt[n]{x^2}}{2\sqrt[n]{x}}\right)^{n-1}\right\}dx=$$

$$=\int\frac{a^2-x^2}{2x}dx=\frac{a^2}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}x^2+C_2$$

Օրինակ 4. Հաշվել ինտեգրալները.

$$T_1=\int\left[\left(\frac{a^{2x}+1}{2}\right)^n+C_n^2\left(\frac{a^{2x}+1}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{a^{2x}-1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{a^{2x}-1}{2}\right)^n\right]dx$$

$$T_2=\int\left[C_n^1\left(\frac{a^{2x}+1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{a^{2x}-1}{2}\right)^1+C_n^3\left(\frac{a^{2x}+1}{2}\right)^{n-3}\left(\frac{a^{2x}-1}{2}\right)^3+\cdots\right.$$

$$\left.+C_n^1\left(\frac{a^{2x}+1}{2}\right)^1\left(\frac{a^{2x}-1}{2}\right)^{n-1}\right]dx$$

Այստեղից ստանում ենք.

$$T_1=\int\frac{a^{2nx}+1}{2}dx=\frac{1}{2}\frac{a^{2nx}}{lna^{2n}}+\frac{x}{2}+C_1,$$

$$T_2=\int\frac{a^{2nx}-1}{2}dx=\frac{1}{2}\frac{a^{2nx}}{lna^{2n}}-\frac{x}{2}+C_2,$$

Օրինակ 5. Հաշվել ինտեգրալները.

$$T_1=\int\{(a^{2x}b^{2x}+c^{2x}d^{2x})^n+C_n^2\,(a^{2x}b^{2x}+c^{2x}d^{2x})^{n-2}(a^{2x}b^{2x}-c^{2x}d^{2x})^2$$
$$+C_n^4(a^{2x}b^{2x}+c^{2x}d^{2x})^{n-4}(a^{2x}b^{2x}-c^{2x}d^{2x})^4+\cdots$$
$$+(a^{2x}b^{2x}-c^{2x}d^{2x})^n$$

$$T_2=\int\{C_n^1\,(a^{2x}b^{2x}+c^{2x}d^{2x})^{n-1}(a^{2x}b^{2x}-c^{2x}d^{2x})^1$$
$$+C_n^3(a^{2x}b^{2x}+c^{2x}d^{2x})^{n-3}(a^{2x}b^{2x}--c^{2x}d^{2x})^3+\cdots$$
$$+C_n^{n-(n-1)}(a^{2x}b^{2x}-c^{2x}d^{2x})^1(a^{2x}b^{2x}-c^{2x}d^{2x})^{n-1}$$

Հաշվելով ինտեգրալատակ գումարները՝ ըստ $[4,8-11]$ աշխատանքի (5) և (6) բանաձևերի՝ կունենանք

$$T_1=\int 2^{n-1}\,(a^{2nx}b^{2nx}+c^{2nx}d^{2nx})dx$$
$$=2^{n-1}\int(ab)^{2nx}dx++2^{n-1}\int(cd)^{2nx}dx=2^{n-1}\frac{(ab)^{2nx}}{ln(ab)^{2n}}$$
$$+2^{n-1}\frac{(cd)^{2nx}}{ln(cd)^{2n}}+C=\frac{2^{n-2}}{n}\left\{\frac{(ab)^{2nx}}{ln(ab)}++\frac{(cd)^{2nx}}{ln(cd)}\right\}+C$$

Նման ձևով՝ $T_2=\frac{2^{n-2}}{n}\left\{\frac{(ab)^{2nx}}{ln(ab)}-\frac{(cd)^{2nx}}{ln(cd)}\right\}+C;$

2. [2, 38-45] աշխատանքի (C_7) բանաձևը հնարավորություն է տալիս ներմուծելու և հաշվելու անորոշ ինտեգրալների մի նոր տեսակ: Վերցնենք հետևյալ ինտեգրալը, որում ինտեգրալատակ արտահայտությունը երեք կոտորակների արտադրյալ է՝

$$T \quad = \int \frac{a^x-1}{a^x+1} \cdot \frac{b^x-1}{b^x+1} \cdot \frac{a^x b^x-1}{a^x b^x+1} dx,$$

Ըստ [2, 38-45] աշխատանքի՝ $\sqrt{a^x}$ ֆունկցիայով ծնվող ուղղանկյուն եռանկյունների համար ստանում են

$$(\sqrt{a^x}\,; \frac{a^x-1}{2}\ ; \frac{a^x+1}{2}) \qquad (ա)$$

եռյակը: Ֆիքսված x-արժեքի համարկունենանք

$$\sin\alpha_1 = \frac{a^x-1}{a^x+1}$$

Նման ձևով $\sqrt{b^x}$ ծնված ուղղանկյուն եռանկյունները կլինեն

$$(\sqrt{b^x}; \frac{b^x-1}{2}; \frac{b^x+1}{2}) \qquad (բ)$$

Որի համար $\sin\alpha_2 = \frac{b^x-1}{b^x+1}$:

Վերցնելով նշված եռանկյունների արտադրյալն ըստ [2, 38-45] աշխատանքի՝ ստանում ենք

$$(\sqrt{a^x b^x}; \frac{a^x b^x-1}{2};\ \frac{a^x b^x+1}{2}) \qquad (գ)$$

կողմերով նոր ուղղանկյուն եռանկյուն, որը կոչվում է վերևում վերցվածների արտադրյալը: Վերջին արտադրյալ եռանկյան համար կստանանք.

$$\sin\alpha_3 = \frac{a^x b^x - 1}{a^x b^x + 1}$$

ա), բ), գ) եռանկյունների համար ունենք

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 - \sin\alpha_3 = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3$$

բանաձևը, որը կիրառում ենք T ինտեգրալը հաշվելու համար:

Կարելի է նկատել, որ T -ի ինտեգրալատակ արտահայտությունը (նշված արտադրյալը) հանդիսանում է երեք գումարելիների հանրահաշվական գումար (C_7) բանաձևի ուժով, որը հուշում է նրա հաշվման եղանակը: Հետևաբար

$$T = \int \frac{a^x-1}{a^x+1} dx + \int \frac{b^x-1}{b^x+1} dx - \int \frac{(ab)^x-1}{(ab)^x+1} dx:$$

Մնում է առանձին-առանձին հաշվել այս գումարելի ինտեգրալները և գումարել.

$$\int \frac{a^x-1}{a^x+1} dx = \log_a e\, ln\frac{(a^x+1)^2}{a^x} + C_1 = \ ln\frac{(a^x+1)^{2\log_a e}}{e^x} + C_1,$$

$$\int \frac{b^x-1}{b^x+1} dx = \log_a e\, ln\frac{(b^x+1)^2}{b^x} + C_2 = ln\frac{(b^x+1)^{2\log_b e}}{e^x} + C_2,$$

$$\int \frac{(ab)^x-1}{(ab)^x+1} dx = \log_{ab} e\, ln\frac{((ab)^x+1)^2}{(ab)^x} + C_3 = \ ln\frac{((ab)^x+1)^{2\log_{ab} e}}{e^x} + C_3,$$

Այսպիսով, մեր ինտեգրալն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$T = \int \frac{a^x-1}{a^x+1}\frac{b^x-1}{b^x+1}\frac{(ab)^x-1}{(ab)^x+1}dx =$$

$$= ln\frac{(a^x+1)^{2\log_a e}}{e^x} + ln\frac{(b^x+1)^{2\log_b e}}{e^x} - ln\frac{((ab)^x+1)^{2\log_{ab} e}}{e^x} + C =$$

$$= ln\frac{(a^x+1)^{2\log_a e}.(b^x+1)^{2\log_b e}}{e^x(a^x b^x+1)^{2\log_{ab} e}} + C,$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

Օրինակ2_1. Ըստ (2)-ի՝ կունենանք

$$\int \frac{3^x-1}{3^x+1}\cdot\frac{5^x-1}{5^x+1}\cdot\frac{15^x-1}{15^x+1}dx = \ ln\frac{(3^x+1)^{2\log_3 e}\cdot(5^x+1)^{2\log_5 e}}{e^x(15^x+1)^{2\log_{15} e}} + C,$$

(2) –ում, երբ b=a, կունենանք

$$\int \left(\frac{a^x-1}{a^x+1}\right)^2 \frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}dx = ln\frac{(a^x+1)^{4\log_a e}}{e^x(a^{2x}+1)^{\log_a e}} + C:$$

Ներմուծված մեթոդները հենվում են գրականությունում նշված մեր նախկին աշխատանքների վրա և կարող են օգտագործվել այլ, ուրիշ ինտեգրալներ ներմուծելու՝ ստանալու համար:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Բաղդասարյան Ժ. Ն., Բինոմական գործակիցների երկրաչափական իմաստը. «Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում, գիտական և մեթոդական հոդվածների ժողովածու», «Ճարտարագետ», պր. II, Երևան, 2004թ.:
2. Багдасарян Ж. Н., Багдасарян А. Ж., Геометрия пифагоровых функциональных троек. «Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում, գիտակա և մեթոդական հոդվածներ ժողովածու», Հատոր 3, N 3, «Ճարտարագետ», Երևան, 2007թ.:
3. Բաղդասարյան Ա. Ժ., Բաղդասարյան Ժ. Ն., Պարզ թվերի աստիճաններով ծնված երկրաչափական պատկերների մասին, «ՎՊՀ գիտ. աշխատություններ: Ս. Ն. Մերգելյանի ծննդյան 80-ամյակին նվիրված միջբուհական գիտաժողով», Վանաձոր, 2008թ.:
4. Բաղդասարյան Ժ. Ն., Բաղդասարյան Ա. Ժ,- Գումարների որոշ տիպեր, նրանց հաշվումը և երկրաչափական մեկնաբանումը: ՎՊՀ-ի գիտական տեղեկագիր, պրակ Բ, Երևան, 2017 թ.:
5. Բաղդասարյան Ժ. Ն. «Доказательство великой теоремы Ферма», «Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում» գիտամեթոդական հոդվածների ժողովածու, Երևան, 2005թ.:
6. Серпинский В. Ф. «Пифагоровы треугольники». Москва, 1959 г.

Интегралы, порожденные произведением пифагоровых троек

Багдасарян Жора
Багдасарян Аревик

Резюме

Ключевые слова: *возведение в степень, сумма, формула, выражение, операция, бином Ньютона*

На множестве прямоугольных треугольников нами введена операция умножения и возведения в степень с натуральными и дробными показателеми. [1, 25-35], [5, 35-45].

В этих работах выявлен ряд применений введенных операций. Цель этой работы - показать применение указанных действий еще в одной области, касающейся раздела интегралов в курсе математического анализа.

Оказывается, формулы, полученные из произведения и возведения в степень натуральными и дробными показателями прямоугольных треугольников, позволяют ввести и вычислить два класса неопределенных интегралов, которые не встречаются в классической литературе.

Используя формулы A7 и A8, в работе [2, 38-45] , а также формулы (11) и (12) в работе [1, 25-35], были введены и подсчитаны некоторые неопределенные интегралы.

Чтобы вычислить интеграл первого класса (пример 1-5), мы использовали новый метод вычисления сумм, который рассмотрен в работе [4, 8-11].

Для вычисления интеграла второго класса (пункт 2) мы используем результаты работ [2, 38-45].

Integrals Generated by the Product of Pythagorean Triples

Bagdasaryan Zhora
Bagdasaryan Arevik

Summary

Keywords: *exponentiation, sum, formula, expression, operation, Newton's binomial theorem*

We have introduced the operation of multiplication and exponentiation with natural and fractional exponents not many of the right triangles. [1.25-35], [5.35-45].

In these works, a number of applications of the introduced operations are clarified. The purpose of this work is to show the application of these actions in another area, concerning the division of integrals in the course of mathematical analysis.

It turns out that the formulas, obtained from the product and exponentiation by the natural and fractional exponents of right-angled triangles, allow one to introduce and calculate two classes of indefinite integrals that are not found in the classical literature.

Using formulas A7 and A8, in the work [2, 38-45], as well as formulas (11) and (12), some indefinite integrals were introduced and calculated in [1, 25-35].

To calculate the integral of the first class (Example 1-5), we used a new method for calculating sums, which was considered in the article [4, 8-11].

To calculate the integral of the second class (point 2), we use the results of the work [2, 38-45].