Դիրիխլեի սկզբունքի կիրառումը՝ որպես ուսուցման արդյունավետության բարձրացման միջոց

Նիկողոսյան Գագիկ

Հանգուցային բառեր. *Ապացուցում, հերքում, արկղ, ճագար, բաժանելիություն, կետ, հատված, մակերես, ծավալ, անհավասարություն*

Արդյունավետ ուսուցման կազմակերպման, կրթության բովանդակության ճիշտ մատուցման և կրթության նպատակներն իրականացնելու համար անհրաժեշտ են որոշակի մանկավարժական և առարկայական մեթոդներ, սկզբունքներ, հնարքներ և ձևեր: Մեթոդների ընտրությունն ու կիրառությունը կապված է բազմաթիվ խնդիրների ու նպատակների հետ, որոնք իրական լուծում կարող են ստանալ միայն հատուկ պլանավորված, նպատակաուղղված և կազմակերպված ուսումնական գործընթացի միջոցով:

Ժամանակակից դասի արդյունավետության բարձրացումը ենթադրում է մի շարք ուղիների զուգորդված գործադրում [1, 8-11; 3, 102-103], այն է.

- ուսուցչի պրոֆեսիոնալ պատրաստվածության բարձրացում,
- դասի նպատակների և խնդիրների ճիշտ որոշում,
- դասի ընթացքում սովորողների ճանաչողական, ստեղծագործական ընդունակությունների ու կարողությունների ձևավորում և զարգացում,
- ուսուցման կազմակերպման դիդակտիկ համակարգերի արդյունավետ կիրառում:

Այս համատեքստում սույն աշխատանքում կփորձենք ի ցույց դնել Դիրիխլեի սկզբունքի և այդ սկզբունքից բխող տարբեր պնդումների հնարավոր արդյունավետ կիրառությունները մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում, ինչը, կարծում ենք, կնպաստի ինչպես ուսուցիչների պրոֆեսիոնալ պատրաստվածության բարձրացմանն, այնպես էլ սովորողների ստեղծագործական և էվրիստիկ մտածողության զարգացմանը:

Ինչպես գիտենք, ՀՀ-ում անցում կատարելով տասներկուամյա կրթական համակարգի, դպրոցական դասընթացում տարբեր առարկաների ծրագրերում կատարվեցին փոփոխություններ, այն է՝ ավելացան նոր բաժիններ, կամ էլ եղած բաժիններում մատուցվող նյութը դարձավ առավել ընդգրկուն: Մասնավորապես, 11-րդ դասարանի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի հանրահաշվի դպրոցական դասընթացում «Տրամաբանության տարրեր» գլխում ավելացավ նոր պարագրաֆ՝ «Ապացուցում և հերքում: Ապացուցման և հերքման հիմնական մեթոդները» [2, 71-75]: Սույն պարագրաֆում, ի թիվս ապացուցման այլ մեթոդների, հակիրճ կերպով, լոկ օրինակների միջոցով խոսվում է նաև Դիրիխլեի սկզբունքի մասին, առաջարկվում են նաև մի քանի տիպային խնդիրներ՝ այս սկզբունքին վերաբերող:

Կարծում ենք դասագրքում նյութի առկա ծավալը հնարավորություն չի ընձեռում աշակերտներին հավուր պատշաճի ընկալելու Դիրիխլեի սկզբունքի էությունն ու կիրառելիության սահմանները: Մինչդեռ հայտնի է, թե որքան լայն կիրառություն ունի այս սկզբունքը մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում, մասնավորաբար օլիմպիադաներում հանդիպող ապացուցման վերաբերյալ շատ խնդիրների լուծման հիմքում ընկած է հենց այս սկզբունքի կիրառումը:

Սովորաբար մաթեմատիկական գրականությունում գերմանացի հայտի մաթեմատիկոս Պետեր Գուստավ Լեժեն Դիրիխլեի (1805-1859) սկզբունքը տրվում է ճագարների և վանդակների օրինակով [7, 96], այն է. եթե n հատ վանդակներում գտնվում են N թվով ճագարներ, ընդ որում $N > n$, ապա կգտնվի այնպիսի վանդակ, որում կլինեն մեկից ավել ճագարներ: Այս սկզբունքի ճշմարտացիության մեջ հեշտությամբ կարելի է համոզվել, կիրառելով հակասող ենթադրության մեթոդը:

Ավելորդ չէ նշել, որ Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն ոչ թե որոշում ենք այն վանդակը, որում կան մեկից ավել ճագարներ, այլ միայն հիմնավորում ենք այդպիսի վանդակի գոյությունը :

Տարբեր խնդիրներում կիրառվում է նաև Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքը [7, 97], համաձայն որի եթե n հատ վանդակներում գտնվում են N թվով ճագարներ, ընդ որում $N > kn$, ապա կգտնվի այնպիսի վանդակ, որում կլինեն առնվազն $k+1$ ճագարներ:

Աշակերտի համար, ով առաջին անգամ է ծանոթանում այս սկզբունքին, առաջին հայացքից կարող է խիստ զարմանալի թվալ, թե ինչպե՞ս կարող է այս պարզ ու ակներև պնդումը դառնալ արդյունավետ և հուսալի «գործիք» տարաբնույթ բարդ խնդիրների լուծման ժամանակ: Ըստ էության, հիմնական դժվարությունը կայանում է նրանում, որ յուրաքանչյուր կոնկրետ խնդրում ի սկզբանե ամեննին պարզ չէ, նրանում կիրառելի՞ է արդյոք Դիրիխլեի սկզբունքը, թե ոչ, և բացի այդ, այս սկզբունքի կիրառման ցանկության դեպքում անգամ, խնդրի տեսքից ու դրվածքից ելնելով, այնքան էլ հեշտ չէ կռահել, թե նրանում ինչն է հանդես գալիս «ճագարի» դերում և ինչը «վանդակի» դերում: Դրա համար ֆորմալ առումով Դիրիխլեի սկզբունքին ծանոթանալուց զատ անհրաժեշտ է տրամաբանական խնդիրների լուծման որոշակի հմտություն, կարողություն և փորձառություն:

Ստորև կմատնանշենք կոնկրետ մեթոդական ցուցումներ, ինչպես նաև կձևակերպենք Դիրիխլեի սկզբունքից բխող կամ վերջինիս համանման տարբերակներ և ու պարզ պնդումներ, որոնք հնարավորություն կտան Դիրիխլեի սկզբունքի կամ նրանից բխող առանձին պնդումների կիրառմամբ լուծել տարբեր բարդությունների տիպային և ոչ տիպային խնդիրներ:

Ըստ էության, Դիրիխլեի սկզբունքի կիրառմամբ համեմատաբար պարզ խնդիրներ լուծելիս, ընդհանուր առմամբ, պետք է առաջնորդվել հետևյալ երկու մոտեցումներից որևէ մեկով.

▪ կամ ելնելով տրված խնդրի դրվածքից և ելակետային պայմաններից, ընտրում ենք կոնկրետ «ճագարներ» ու «վանդակներ», ինչպես նաև այն «մեխանիզմը», համաձայն որի «ճագարներին» պետք է տեղադրենք «վանդակներում» և Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն ապացուցում ենք այն, ինչ պահանջվում է,

- կամ էլ կատարում ենք խնդրի ելակետային պնդմանը հակասող ենթադրություն և Դիրիխլեի սկզբունքի կիրառմամբ, դարձյալ ընտրելով «ճագարներ» ու «վանդակներ», հանգում ենք հակասության, ինչն էլ, բնականաբար, կապացուցի ելակետային պնդման ճշմարտացիությունը։

Որպես ասվածի հիմնավորում՝ դիտարկենք մի քանի խնդիրներ։

Խնդիր 1։ Ապացուցել, որ $5x5$ չափերի քառակուսային աղյուսակի վանդակներում հնարավոր չէ տեղադրել -1; 0 և 1 թվերն այնպես, որ բոլոր տողերի, սյուների և անկյունագծերի վրա դասավորված թվերի գումարները լինեն միմյանցից տարբեր։

Լուծում։ Ունենք 5 տող, 5 սյուն և 2 անկյունագիծ և, ուրեմն, հնարավոր գումարների քանակը 12 է։ Այս հնարավոր գումարները դիտարկենք որպես «ճագարներ»։ Ըստ խնդրի պայմանի՝ յուրաքանչյուր տողում, սյունում կամ անկյունագծի վրա պետք է դասավորված լինեն հինգ թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է լինել -1; 0 կամ 1, հետևաբար որևէ տողում, սյունում կամ անկյունագծի վրա դասավորված թվերի գումարը կարող է լինել -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4 կամ 5։ Այս հնարավոր գումարներն էլ դիտարկենք որպես «վանդակներ»։ Պայմանավորվենք յուրաքանչյուր «ճագար»-գումար տեղադրել թվապես իրեն հավասար «վանդակում»։ Ունենք $n=11$ «վանդակներ» և $N=12$ «ճագարներ», հետևաբար, Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ», որում կլինեն առնվազն երկու «ճագարներ», այսինքն առնվազն երկու գումար միմյանց հավասար են, հետևաբար խնդրի պնդումն ապացուցված է։

Հավելենք, որ այս խնդիրն առաջադրված է եղել 1996 թվականի ՀՀ դպրոցականների մաթեմատիկայի օլիմպիադայի եզրափակիչ փուլում։

Նկատենք, որ խնդրում նշված պնդումն իրավացի է ուզած nxn չափի քառակուսային աղյուսակի համար։

Խնդիր 2։ Դասարանում հայոց լեզվի թելադրությանը ներկա էր 29 աշակերտ, որոնցից Սերգեյը կատարել էր բոլորից շատ, թվով 13 ուղղագրական սխալ, իսկ մնացած աշակերտներից յուրաքանչյուրը կատարել էին ավելի քիչ սխալներ։ Ապացուցել, որ դասարանում կգտնվեն առնվազն երեք աշակերտներ, որոնք կատարած կլինեն նույն քանակի սխալներ [4, 41]։

Լուծում։ Որպես «վանդակներ» ընտրենք աշակերտների թույլ տված սխալների հնարավոր քանակները։ Վերջիններս 14-ն են՝ 0; 1; 2; …13։ Որպես «ճագարներ» դիտարկենք թելադրություն գրած աշակերտներին, որոնք թվով 29-ն են։ Պայմանավորվենք յուրաքանչյուր «ճագար»-աշակերտ տեղադրել թվապես իր կատարած սխալների քանակին հավասար «վանդակում»։ Այսպիսով, ունենք

$n=14$ «վանդակներ» և $N=29>2\cdot 14\ (k=2)$ «ճագարներ», հետևաբար, Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ», որում կլինեն առնվազն $k+1=2+1=3$ «ճագարներ»-աշակերտներ, որոնք կատարած կլինեն նույն քանակի սխալներ (քանի որ գտնվում են նույն «վանդակում»), հետևաբար խնդրի պնդումն ապացուցված է:

Շատ դեպքերում, համեմատաբար ոչ պարզ խնդիրներում, ի սկզբանե հնարավոր չէ խնդրի ելակետային տվյալներից ելնելով միանգամից ընտրել կոնկրետ «ճագարներ» ու «վանդակներ», այլ պետք է նախապես կատարել որոշակի դատողություններ, որից հետո միայն փորձել կիրառել Դիրիխլեի սկզբունքը:

Այս համատեքստում դիտարկենք հետևյալ խնդիրը [6, 22]:

Խնդիր 3: Ապացուցել, որ կամայական 110 հատ բնական թվերի մեջ միշտ կգտնվեն այնպիսի երկուսը, որոնցում կհամընկնեն առնվազն երկու կարգային թվանշաններ:

Լուծում: Քանի որ միանիշ բնական թվերը ինն են, ուստի կամայական 110 բնական թվերի մեջ միշտ կգտնվեն առնվազն 101 ոչ միանիշ թվեր: Հեշտ է նկատել, որ կամայական 101 ոչ միանիշ թվերի մեջ գոնե երկուսի վերջին երկու թվանշանները, համաձայն Դիրիխլեի սկզբունքի կհամընկնեն, քանզի այդ թվերի վերջին երկու թվանշանների համար գոյություն ունի հնարավոր 100 տարբերակ՝ 00-ից մինչև 99-ը: Խնդրի պնդումն ապացուցված է:

Նշենք, որ Դիրիխլեի սկզբունքը պնդում է հավելորդով, երբ ճագարներն ավելին են, քան վանդակները: Ընդհանրացնելով, համանման պնդումներ կարելի է ձևակերպել նաև պակասորդով, երբ ճագարների քանակը պակաս է վանդակների քանակից կամ տրված որոշակի թվից:

Պնդում 1: Եթե n հատ վանդակներում գտնվում են N թվով ճագարներ, ընդ որում $N<n$, ապա կգտնվի այնպիսի վանդակ, որում ճագարներ չեն լինի:

Պնդում 2: Եթե n հատ վանդակներում գտնվում են N թվով ճագարներ, ընդ որում $N<\frac{n(n-1)}{2}$, ապա կգտնվեն այնպիսի երկու վանդակներ, որոնցում կլինեն միևնույն թվով ճագարներ:

Այս պնդումների ճշմարտացիության մեջ ևս հեշտությամբ կարելի է համոզվել՝ կիրառելով հակասող ենթադրության մեթոդը:

Նկատենք, որ խնդիր 1-ը կարելի է լուծել նաև պնդում 1-ի կիրառմամբ: Դրա համար բավական է նախապես կատարել խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակասող ենթադրություն, որից հետո պետք է ուղղակի վերը նշած լուծման մեջ տեղերով փոխել «ճագարներին» և «վանդակներին»: Արդյունքում, պնդում 1-ի համաձայն առաջացած դատարկ «վանդակի» առկայությունն էլ կփաստի խնդրի պնդման ճշմարտացիությունը:

Դիտարկենք ևս մեկ խնդիր:

Խնդիր 4: Հնարավո՞ր է արդյոք թվով 60 միատեսակ մետաղադրամներ բաժանել 12 քսակներում այնպես, որ յուրաքաչյուր երկու քսակում լինեն տարբեր քանակի մետաղադրամներ [5, 135]:

Լուծում: Ունենք $n = 12$ «վանդակներ»-քսակներ և $N = 60 < \frac{n(n-1)}{2} = 66$ «ճագարներ»-մետաղադրամներ, հետևաբար, համաձայն պնդում 2-ի, ուզած բաժանման դեպքում էլ կլինեն առնվազն երկու միևնույն քանակի մետաղադրամներ պարունակող քսակներ: Դեռ ավելին, ըստ էության կարող ենք պնդել, որ անհրաժեշտ է առնվազն $\frac{n(n-1)}{2} = 66$ մետաղադրամ, որպեսզի հնարավոր լինի վերջիններս 12 քսակներում բաժանել այնպես, որ յուրաքանչյուր երկու քսակում լինեն տարբեր քանակի մետաղադրամներ (եթե, իհարկե, քսակում մետաղադրամի բացակայությունը չի արգելվում, հակառակ պարագայում խնդրում նշված պայմանին բավարարելու համար անհրաժեշտ կլինի ոչ թե 66, այլ առնվազն $\frac{n(n-1)}{2} + 1 = 67$ մետաղադրամ):

Դիրիխլեի սկզբունքն իր արդյունավետ կիրառությունն ունի նաև այնպիսի երկրաչափական խնդիրներում, որոնցում որոշակի տիրույթում կամայական ձևով ընտրվում են ինչ-որ քանակի կետեր և անհրաժեշտ է կամ գնահատել որևէ երկու կետերի միջև եղած հեռավորությունը, կամ էլ ապացուցել, որ գոյություն ունի տրված տիրույթի որոշակի մաս, որում վերը նշած կետերը բացակայում են: Այս համատեքստում դիտարկենք մի քանի խնդիրներ:

Խնդիր 5: Միավոր կողմով կանոնավոր եռանկյան ներքին տիրույթում ընտրված են կամայական 5 կետեր: Ապացուցել, որ այդ կետերի մեջ միշտ կգտնվեն այնպիսի երկուսը, որոնց միջև եղած հեռավորությունը չի գերազանցի 0,5-ը [4, 48]:

Լուծում: Մինչ խնդրի լուծմանն անցնելը նկատենք, որ կանոնավոր եռանկյան ներքին տիրույթի կամայական երկու կետերի միջև եղած հեռավորությունը (համաձայն եռանկյան անհավասարության) փոքր է եռանկյան կողմի երկարությունից:

Տրված եռանկյունն իր միջին գծերով բաժանելով 0,5 կողմով չորս կանոնավոր «փոքր» եռանկյունների և վերջիններս դիտարկելով որպես «վանդակներ», իսկ կամայական ձևով ընտրված 5 կետերը՝ որպես «ճագարներ» (թյուրըմբռնումից խուսափելու համար կպայմանավորվենք միջին գծերին պատկանող կետերն ընդգրկել միայն զուտ միջին գծերով ձևավորված «վանդակ»-եռանկյունում)՝ Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն՝ կարող ենք պնդել, որ կգտնվի 0,5 կողմով այնպիսի կանոնավոր «փոքր» եռանկյուն տիրույթ, որն իր մեջ կպարունակի առնվազն երկու կետ, հետևաբար հենց այդ երկու կետերի միջև եղած հեռավորությունն էլ չի գերազանցի 0,5-ը: Պնդումն ապացուցված է:

Նմանատիպ խնդիրների լուծման ժամանակ, առհասարակ, ցանկալի է վարվել հետևյալ կերպ.

- նախապես պարզել, թե ինչպիսի Φ տիրույթին պատկանող կամայական երկու կետեր են, որ միմյանցից կարող են հեռացված լինեն առավելագույնը տրված չափով,
- որից հետո ելակետային տիրույթը բաժանել այնպիսի մասերի, որոնց մեջ կլինեն Φ-ատիպ «փոքր» տիրույթներ և Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն ապացուցել, որ տրված կետերի մեջ միշտ կգտնվեն այնպիսի երկուսը, որոնք կպատկանեն որևէ «փոքր» Φ -ատիպ տիրույթի:

Որպես ասվածի հիմնավորում՝ դիտարկենք հետևյալ խնդիրը,

Խնդիր 6: Միավոր կողով կանոնավոր եռանկյուն բուրգի արտաքին մակերևույթի վրա ընտրված են կամայական 9 կետեր: Ապացուցել, որ այդ կետերի մեջ միշտ կգտնվեն այնպիսի երկուսը, որոնց միջև եղած հեռավորությունը չի գերազանցի 0,5-ը [6, 40]:

Լուծում: Մինչ խնդրի լուծմանն անցնելը նկատենք, որ կանոնավոր եռանկյուն բուրգի արտաքին մակերևույթի վրա գտնվող կամայան երկու կետերի միջև եղած հեռավորությունը (համաձայն եռանկյան անհավասարության) չի կարող գերազանցել բուրգի կողմնային կողի երկարությանը:

Տրված կանոնավոր բուրգի յուրաքանչյուր նիստ, այն է՝ յուրաքանչյուր կանոնավոր եռանկյուն, իր միջին գծերով բաժանենք չորս հավասար «փոքր» եռանկյունների: Արդյունքում կունենանք բուրգի յուրաքանչյուր գագաթն ընդգրկող թվով չորս 0,5 երկարությամբ «փոքր» եռանկյունների եռյակներ (որոնց ընդհանուր մակերևույթը պայմանականորեն անվանենք «փոքր» եռանկյուն բուրգերի կողմնային մակերևույթներ), ինչպես նաև բուրգի յուրաքանչյուր նիստին պատկանող և վերջինիս որևէ գագաթ չընդգրկող թվով չորս 0,5 երկարությամբ «փոքր» եռանկյուններ: Այս թվով 8 տիրույթները դիտարկելով որպես «վանդակներ», իսկ կամայական ձևով ընտրված 9 կետերը՝ որպես «ճագարներ»՝ Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն կարող ենք պնդել, որ կգտնվի մի տիրույթ, այն է՝ «փոքր» եռանկյուն կամ «փոքր» եռանկյուն բուրգի կողմնային մակերևույթ, որն իր մեջ կպարունակի առնվազն երկու կետ, հետևաբար հենց այդ երկու կետերի միջև եղած հեռավորությունն էլ չի գիրազանցի 0,5-ը: Պնդումն ապացուցված է:

Խնդիր 7: $4x4$ չափերի քառակուսու ներքին տիրույթում ընտրված են կամայական 15 կետեր (որոնք չեն գտնվում քառակուսու կողմերի վրա): Ապացուցել, որ տրված քառակուսու մեջ միշտ կարելի է ընտրել $1x1$ չափերի միավոր քառակուսի այնպիսին, որ վերջինիս ներքին տիրույթում որևէ կետ չգտնվի [4, 47]:

Լուծում: Տրված քառակուսին բաժանելով թվով 16 միավոր քառակուսիների և վերջիններս դիտարկելով որպես «վանդակներ», իսկ կամայական ձևով ընտրված 15 կետերը՝ որպես «ճագարներ», պնդում 1-ի համաձայն, «ճագարների» ցանկացած դասավորության դեպքում կունենանք դատարկ «վանդակ», որն էլ կհանդիսանա հենց որոնելի $1x1$ չափերի միավոր քառակուսին: Պնդումն ապացուցված է:

Դիրիխլեի սկզբունքն իր օգտակար և արդյունավետ կիրառությունն ունի նաև բաժանելիության հետ կապված շատ խնդիրներում: Հաշվի առնելով այն փաստը, որ կամայական բնական թիվ տրված n բնական թվի վրա բաժանելիս առաջացած մնացորդը կարող է ընդունել n հատ հնարավոր արժեքներ, այն է՝ 0; 1; 2; …; n-1, Դիրիխլեի սկզբունքից անմիջականորեն հետևում է հետևյալ կարևոր պնդումը:

Պնդում 3: Կամայական $n+1$ հատ բնական թվերի մեջ միշտ կգտնվեն այնպիսի երկուսը, որոնք n-ի վրա բաժանելիս կտան նույն մնացորդը (և, հետևաբար, այդ նույն թվերի տարբերությունը կբաժանվի n-ի):

Քննարկենք ևս երկու խնդիր բաժանելիության վերաբերյալ:

Խնդիր 8: Ապացուցել, որ գոյություն ունեն 4 հիմքով և բնական ցուցիչներով երկու այնպիսի աստիճաններ, որոնց տարբերությունը բաժանվում է 2009-ի 5, 137]:

Լուծում: Համաձայն պնդում 3-ի՝ բավական է դիտարկել 4 հիմքով, բնական ցուցիչներով, միմյանցից տարբեր թվով 2009+1=2010 հատ աստիճաններ, և կարող ենք պնդել, որ նրանց մեջ կգտնվեն այնպիսի երկուսը, որոնց տարբերությունը կբաժանվի 2009-ի: Մասնավորաբար, որպես այդպիսիք կարելի է դիտարկել հետևյալ աստիճանները՝ $4^1;\ 4^2;\ 4^3;\ \cdots;\ 4^{2010}$: Պնդումն ապացուցված է:

Նկատենք, որ խնդիր 8-ում 4 և 2009 թվերը կարելի է փոխարինել կամայական a և p բնական թվերով և, բացի այդ, եթե այդ երկու թվերը փոխադարձ պարզ են, այսինքն, եթե $(a;p)=1$, ապա համաձայն խնդիր 5-ի արդյունքների, կարող ենք պնդել, որ $a^1;\ a^2;\ a^3;\ a^4;\ \cdots$ հաջորդականության անդամների՝ p-ի վրա բաժանելիս առաջացած մնացորդների $r_1;\ r_2;\ r_3;\ r_4;\ \cdots$ հաջորդականությունը պարբերական է:

Խնդիր 9: Ապացուցել, որ գոյություն ունի միայն 1-երից կազմված բնական թիվ, որը բաժանվում է 1997-ի [5, 318]:

Լուծում: Ըստ պնդում 3-ի, բավական է դիտարկել միմյանցից տարբեր, թվով 1998 հատ կամայական բնական թվեր և կարող ենք պնդել, որ նրանց մեջ կգտնվեն այնպիսի երկուսը, որոնց տարբերությունը կբաժանվի 1997 -ի: Մասնավորաբար, որպես այդպիսիք կարելի է դիտարկել հետևյալ թվերը՝ $1;\ 11;\ 111;\ \cdots;\ \underbrace{11\ldots1}_{1998 \text{ հատ}}$:

Ուստի, ելնելով վերոգրյալից, կարող ենք պնդել, որ գոյություն ունեն m և

n $(1998 \geq m > n)$ բնական թվեր այնպիսին, որ $\underbrace{11\ldots1}_{\text{m հատ}} - \underbrace{11\ldots1}_{\text{n հատ}} = \underbrace{11\ldots1}_{\text{m-n հատ}} \cdot 10^n \vdots 1997$

և քանի որ $(10;1997) = 1$, ուրեմն $\underbrace{11\ldots1}_{\text{m-n հատ}} \vdots 1997$: Պնդումն ապացուցված է:

Նկատենք, որ խնդիր 9-ում 1997-ը կարելի է փոխարինել 10-ի հետ փոխադարձ պարզ ուզած բնական թվով, և դեռ ավելին, նմանատիպ պնդում կարելի է ձևակերպել ոչ միայն միայն 1-երից կազմված թվերի համար, այլ նաև կամայական, միևնույն թվանշանից կազմված բնական թվերի համար:

Ամփոփելով կարող ենք ասել, որ Դիրիխլեի սկզբունքն (կամ վերջինիս համանման վերը նշած պակասորդով պնդումը) իր օգտակար և արդյունավետ կիրառությունն ունի մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի տարբեր տիպային և ոչ տիպային խնդիրներում:

Կարծում ենք աշխատանքը կհետաքրքրի ինչպես աշակերտներին, այնպես էլ ուսուցիչներին և, առհասարակ, մաթեմատիկայով հետաքրքրվողներին, հնարավորություն կտա ավելի խորն ընկալելու Դիրիխլեի սկզբունքի էությունն ու կիրառելիության սահմանները, ինչպես նաև կնպաստի սովորողների տրամաբանական և ստեղծագործական մտածողության զարգացմանը:

Հետազոտությունն իրականացվել է ՀՀ ԿԳՆ գիտության պետական կոմիտեի տրամադրած ֆինանսավորմամբ՝ 18T-5C287 ծածկագրով գիտական թեմայի շրջանակներում:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Ավագյան Ռ.Մ., Կարայան Հ.Ս., Ասլանյան Լ.Ս., Ավագ դպրոց. խնդիրներ և լուծումներ, «Բնագետ», 2014, հատուկ թողարկում, Համահայկական IV կրթական գիտաժողով «Բնագիտությունը 21-րդ դարում. ուսուցման հիմնախնդիրներ և լուծումներ», էջ. 8-11:
2. Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր: Ավագ դպրոցի 11-րդ դասարանի դասագիրք (բնագիտա-մաթեմատիկական հոսքի համար). – Եր.: ՏիգրանՄեծ, 2010, 208 էջ:
3. Պետրոսյան Գ., Պետրոսյան Պ., Սովորողների հետաքրքրությունների զարգացումը դիդակտիկական խաղերի օգնությամբ, «Բնագետ», 2012, հ. 4, էջ. 102-103:
4. Горбачев Н.В., Сборник олимпиадных задач по математике.-М., МЦНМО, 2004.-560 с.
5. Ибатулин И.Ж., Математические олимпиады. М.: Бином, 2013.-358 с.
6. Медников Л.Э., Шаповалов А.В., Турнир городов: мир математики в задачах. М.: МЦНМО, 2017, 472 с.
7. Савин А.П., Энциклопедический словарь юного математика.-М.: Педагогика, 1989, 352 с.

Применение принципа Дирихле как способ повышения эффективности обучения

Никогосян Гагик

Резюме

Ключевые слова: *доказательство, отрицание, ящик, кролик, кратность, точка, отрезок, площадь, объем, неравенство*

Работа посвящена обсуждению некоторых возможных применений принципа Дирихле в разных задачах. Кратко изложена суть принципа Дирихле, также сформулированы некоторые важные утверждения, которые либо вытекают из принципа Дирихле, либо аналогичны этому принципу. Приведены методологические рекомендации о возможном применении этого принципа в различных нестандартных задачах школьного курса математики. Обсуждены разные нетиповые задачи, при решении которых использованы либо принцип Дирихле, либо сформулированные утверждения.

Выявлены основные типы задач, при решении которых принцип Дирихле может иметь эффективное применение. Это различные задачи на доказательство или опровержение, разные задачи на делимость, когда необходимо доказать существование натурального числа некоторого вида, который делится на натуральное число, различные задачи геометрического характера, когда в некоторой области рассматривается конечное число произвольных точек и либо требуется оценить расстояние между двумя точками, либо требуется доказать существование подобласти, которая не содержит ни одной из упомянутых точек.

Application of the Principle of Dirichlet as a Way to Increase the Effectiveness of Learning

Nikoghosyan Gagik

Summary

Key words: *proof, denial, box, rabbit, multiplicity, point, segment, area, volume, inequality*

The work is devoted to the discussion of some possible applications of the Dirichlet principle in different problems. In brief, the essence of the Dirichlet principle is stated, some important statements are also formulated, which either follow from the Dirichlet principle or are similar to this principle. The methodological recommendations on the possible application of this principle in various non-standard problems of the school course of mathematics are given. Various non-typical problems are discussed, in the solution of which either the Dirichlet principle or the formulated statements are used.

The main types of problems, at which the Dirichlet principle can have an effective application, are revealed. These are different tasks for proof or refutation, these are different problems for divisibility, when it is necessary to prove the existence of a natural chils of a certain type, which is divided into a number, these are different problems of a geometric nature, when in a certain region a finite number of arbitrary points are considered and it is required to estimate either the distance two points, or it is required to prove the existence of a subregion that does not contain any of the points mentioned.