Տարբերակային կորիզով ինտեգրալ օպերատորների հակադարձումը

Պապոյան Արտիկ
Մխիթարյան Վարուժան

Հանգուցային բառեր. *Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումներ, ռեզոլվենտա, կորիզ, դիֆերենցիալ հավասարում, մասնական ածանցյալ, Կրեյն-Լևինսոնի բանաձևեր*

Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ օպերատորների ռեզոլվենտային կորիզի գտնելը դիսկրետ եղանակով պահանջում է մեծաքանակ գործողություններ: Աշխատանքում այդ խնդիրը լուծելու ավելի էֆեկտիվ եղանակ է առաջարկվում՝ հանգեցնելով այն մեկ մասնական ածանցյալներով առաջին աստիճանի դիֆերենցիալ հավասարման և չորս ինտեգրալ հավասարումների, որոնք ավելի հեշտ են դիսկրետիզացվում Կրեյն-Լևինսոնի բանաձևերով:

1. Տարբերակային կորիզով ինտեգրալային օպերատորներ:

Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ օպերատորը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K})y(x)=y(x)-\int_0^{\tau}K'(x,t)y(t)dt \tag{1.1}$$

որտեղ $0<x,\ t<\tau$,

$$K'(x,t)\in C[(0,\tau)\times(0,\tau)]:$$

Եթե կորիզը ունենա $K'(x,t)=K(x,t)=K(x-t)$ տեսքը, ապա կարելի է ցույց տալ, որ $K(x-t)$ ֆունկցիան բավարարում է $\frac{\partial K(x-t)}{\partial x}+\frac{\partial K(x-t)}{\partial t}=0$ դիֆերենցիալ հավասարմանը:

Տեղի ունի նաև հակադարձը.

$\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}=0$ հավասարման լուծումը հանդիսանում է տարբերությունից կախված ֆունկցիա՝ $K(x,t)=K(x-t)$

Եթե $(\mathbf{I}-\mathbf{K})$ օպերատորը հակադարձելի է, $R(x,t)$-ն ինտեգրալ հավասարման ռեզոլվենտան է, ապա $\mathbf{I}+\mathbf{R}=(\mathbf{I}-\mathbf{K})^{-1}$: Հետևաբար կունենանք.

$$(\mathbf{I}+\mathbf{R})y(x)=y(x)+\int_0^{\tau}R(x,s)y(s)ds \tag{1.2}$$

Հայտնի է, որ ռեզոլվենտան բավարարում է հետևյալ հավասարումներին.

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K})R(x,t)=K(x,t) \tag{1.3}$$

$$R(x,t)=(\mathbf{I}+\mathbf{R})K(x,t) \tag{1.4}$$

Եթե $K(x,t)$ -ն կախված լինի տարբերությունից, ապա, ինչպես ասվեց,

$$\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}=0 \tag{A}$$

(1.3) և (1.4)-ը կարող ենք գրել.

$$R(x,t)=K(x,t)+\int_0^{\tau} K(x,s)R(s,t)ds, \tag{1.5}$$

$$R(x,t)=K(x,t)+\int_0^{\tau} R(x,s)K(s,t)ds: \tag{1.6}$$

Թեորեմա: Տարբերակային կորիզով ինտեգրալ օպերատորների ռեզոլվենտային կորիզները բավարարում են

$$\frac{\partial R(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial R(x,t)}{\partial t}=\alpha_1(x)\beta_1(t)-\alpha_2(x)\beta_2(t) \tag{B}$$

հավասարմանը, որտեղ $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ ֆունկցիաները բավարարում են հետևյալ ինտեգրալ հավասարումներին.

$$\begin{aligned}
\alpha_1(x)&=K(x,0)+\int_0^{\tau} K(x,s)\alpha_1(s)ds,\\
\alpha_2(x)&=K(x,\tau)+\int_0^{\tau} K(x,s)\alpha_2(s)ds,\\
\beta_1(t)&=K(0,t)+\int_0^{\tau} K(s,t)\beta_1(s)ds,\\
\beta_2(t)&=K(\tau,t)+\int_0^{\tau} K(s,t)\beta_2(s)ds:
\end{aligned} \tag{C}$$

Ապացույց: (1.5)-ը ածանցենք՝ ըստ x -ի, և օգտվենք (A)-ից.

$$\frac{\partial R(x,t)}{\partial x}=\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}+\int_0^{\tau}\frac{\partial K(x,s)}{\partial x}R(s,t)ds=\frac{\partial K(x,\tau)}{\partial x}-\int_0^{\tau}\frac{\partial K(x,s)}{\partial s}R(s,t)ds:$$

Կատարելով մասերով ինտեգրում՝ կունենանք.

$$\frac{\partial R(x,t)}{\partial x}=\frac{\partial R(x,t)}{\partial x}+\int_0^\tau K(x,s)\frac{\partial R(s,t)}{\partial s}ds-\left[R(\tau,t)K(x,\tau)-R(0,t)K(x,0)\right]:$$

Աջ մասի ինտեգրալը տեղափոխելով ձախ մաս՝ ստացված հավասարումը օպերատորական տեսքով կգրվի.

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K})\frac{\partial R(x,t)}{\partial x}=\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}+K(x,0)R(0,t)-K(x,\tau)R(\tau,t): \tag{1.7}$$

Վերջին հավասարման աջ մասը նշանակելով $A(x,t)$-ով՝

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K})\frac{\partial R(x,t)}{\partial x}=A(x,t) \tag{1.7$'$}$$

(1.7$'$)-ի վրա կիրառելով $\mathsf{I}+\mathsf{R}=(\mathsf{I}-\mathsf{K})^{-1}$ օպերատորը, կունենանք.

$$\frac{\partial R(x,t)}{\partial x}=A(x,t)+\int_0^\tau R(x,s)A(s,t)ds: \tag{1.8}$$

Ձևափոխենք այս արտահայտությունը՝ տեղադրելով $A(x,t)$-ն և կատարելով խմբավորում.

$$\begin{aligned}\frac{\partial R(x,t)}{\partial x}&=\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}+K(x,0)R(0,t)-K(x,\tau)R(\tau,t)+\int_0^\tau R(x,s)\frac{\partial k(s,t)}{\partial s}ds+\\&+R(0,t)\int_0^\tau R(x,s)K(s,0)ds-R(s,t)\int_0^\tau R(x,s)K(s,\tau)ds=\\&=\frac{\partial R(x,t)}{\partial x}+\int_0^\tau R(x,s)\frac{\partial k(s,t)}{\partial s}ds+R(0,t)\left[K(x,0)+\int_0^\tau R(x,s)K(s,0)ds\right]-\\&-R(s,t)\left[K(x,\tau)+\int_0^\tau R(x,s)K(s,\tau)ds\right]:\end{aligned} \tag{1.9}$$

Այժմ (1.6)-ը ածանցենք՝ ըստ t-ի, հաշվի առնելով (A)-ն՝ կունենանք.

$$\frac{\partial R(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}-\int_0^\tau R(x,s)\frac{\partial k(s,t)}{\partial s}ds \tag{1.10}$$

(1.6)-ից ստանանք $R(x,0)$ և $R(x,\tau)$-ն

$$R(x,0)=K(x,0)+\int_0^\tau R(x,s)K(s,0)ds, \tag{1.11}$$

$$R(x,\tau)=K(x,\tau)+\int\limits_0^\tau R(x,s)K(s,\tau)ds: \qquad (1.12)$$

Ձևափոխենք (1.9)-ը՝ օգտվելով (1.10), (1.11) և (1.12)-ից:

$$\frac{\partial R(x,t)}{\partial x}=-\frac{\partial R(x,t)}{\partial t}+R(0,t)\cdot R(x,0)-R(\tau,t)\cdot R(x,\tau):$$

Որտեղից կստանանք (B)-ն՝ կատարելով հետևյալ նշանակումները.

$$\begin{aligned} R(0,t)&=\beta_1(t) \qquad R(x,0)=\alpha_1(x) \\ R(\tau,t)&=\beta_2(t) \qquad R(x,\tau)=\alpha_2(x) \end{aligned} \qquad (1.13)$$

(1.5) և (1.6)-ից՝

$$\begin{aligned} R(x,0)&=K(x,0)+\int\limits_0^\tau K(x,s)R(s,0)ds, \\ R(x,\tau)&=K(x,\tau)+\int\limits_0^\tau K(x,s)R(s,t)ds, \\ R(0,t)&=K(0,t)+\int\limits_0^\tau R(0,s)K(s,t)ds, \\ R(s,t)&=K(\tau,t)+\int\limits_0^\tau R(\tau,s)K(s,t)ds \end{aligned} \qquad (1.14)$$

(1.14)-ից կստանանք (C)-ն՝ օգտվելով (1.13) նշանակումներից: Թեորեման ապացուցված է:

Այսպիսով, ինտեգրալ օպերատորների ռեզոլվենտային կորիզները գտնելու համար նախ պետք է լուծել (C) ինտեգրալ հավասարումները, ապա (B) դիֆերենցիալ հավասարումը:

2. Կրեյն-Լևինսոնի բանաձևերը:

Այս բանաձևերը կստանանք՝ հետևելով [2]-ում առաջարկված մեթոդին: Դիտարկենք $(\mathbf{I}-\mathbf{K})$ օպերատորը (1.1): Ենթադրենք, որ այն հակադարձելի է.

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K})^{-1}=\mathbf{I}+\mathbf{R}$$

Հակադարձ օպերատորի ռեզոլվենտային կորիզը, ըստ էության, կախված է նաև τ -ից, ընդ որում $0\le x,\ t\le T$: 1.-ում կատարված նշանակումների նման՝

$$\begin{aligned} \alpha_1(x,\tau)&=R(x,0,\tau) \qquad \beta_1(t,\tau)=R(0,t,\tau) \\ \alpha_2(x,\tau)&=R(x,\tau,\tau) \qquad \beta_2(t,\tau)=R(\tau,t,\tau) \end{aligned}$$

Ըստ (1.5) և (1.6)-ի՝ նրանք կբավարարեն

$$\alpha_1(x,\tau)=K(x,0)+\int_0^\tau K(x,s)\alpha_1(s,\tau)ds,$$

$$\alpha_2(x,\tau)=K(x,\tau)+\int_0^\tau K(x,s)\alpha_2(s,\tau)ds,$$

$$\beta_1(t,\tau)=K(0,t)+\int_0^\tau K(s,t)\beta_1(s,\tau)ds, \qquad \text{(D)}$$

$$\beta_2(t,\tau)=K(\tau,t)+\int_0^\tau K(s,t)\beta_2(s,\tau)ds$$

ինտեգրալ հավասարումներին: (D)-ի I և III հավասարումներն ածանցելով ըստ τ -ի՝ կունենանք.

$$\frac{\partial\alpha_1(x,\tau)}{\partial\tau}=\int_0^\tau K(x,s)\frac{\partial\alpha_1(s,\tau)}{\partial\tau}ds+K(x,\tau)\cdot\alpha_1(\tau,\tau),$$

$$\frac{\partial\beta_1(t,\tau)}{\partial\tau}=\int_0^\tau K(s,t)\frac{\partial\beta_1(s,\tau)}{\partial\tau}ds+K(\tau,t)\cdot\beta_1(\tau,\tau):$$

Այս հավասարումներից կհանգենք.

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K})\left[\alpha_1^{-1}(\tau,\tau)\frac{\partial\alpha_1(x,\tau)}{\partial\tau}\right]=K(x,\tau),$$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K})\left[\beta_1^{-1}(\tau,\tau)\frac{\partial\beta_1(t,\tau)}{\partial\tau}\right]=K(\tau,t): \qquad (2.1)$$

(D)-ի II և IV հավասարումները գրենք օպերատորական տեսքով.

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K})\alpha_2(x,\tau)=K(x,\tau),$$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K})\beta_2(t,\tau)=K(t,\tau) \qquad (2.2)$$

(2.1) և (2.2)-ից կստանանք.

$$\frac{\partial\alpha_1(x,\tau)}{\partial\tau}=\alpha_1(\tau,\tau)\cdot\alpha_2(x,\tau),$$

$$\frac{\partial\beta_1(x,\tau)}{\partial\tau}=\beta_1(\tau,\tau)\cdot\beta_2(t,\tau): \qquad (2.3)$$

Իսկ այժմ (D)-ի II և IV հավասարումներն ածանցենք համապատասխանաբար՝ ըստ x -ի և ըստ t -ի.

$$\frac{\partial \alpha_2(x,\tau)}{\partial x} = \frac{\partial K(x,\tau)}{\partial x} + \int_0^\tau \frac{\partial K(x,s)}{\partial x} \alpha_2(s,\tau) ds,$$

$$\frac{\partial \beta_2(x,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial K(\tau,t)}{\partial t} + \int_0^\tau \frac{\partial K(s,t)}{\partial t} \beta_2(s,\tau) ds :$$

Ածանցենք (D)-ի II հավասարումը՝ ըստ τ -ի և x -ի.

$$\frac{\partial \alpha_2(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial K(x,\tau)}{\partial \tau} + \int_0^\tau K(x,s) \frac{\partial \alpha_2(s,\tau)}{\partial \tau} ds + K(x,\tau)\alpha_2(\tau,\tau),$$

$$\frac{\partial \alpha_2(x,\tau)}{\partial x} = \frac{\partial K(x,\tau)}{\partial x} + \int_0^\tau K(x,s) \frac{\partial \alpha_2(s,\tau)}{\partial s} ds + K(x,0)\alpha_2(0,\tau) - K(x,\tau)\alpha_2(\tau,\tau):$$

Գումարենք վերջին երկու հավասարումները՝ հաշվի առնելով (A)-ն, կստանանք

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K})\left(\frac{\partial \alpha_2(x,\tau)}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2(x,\tau)}{\partial \tau}\right) = K(x,0)\alpha_2(0,\tau): \qquad (2.4)$$

Կիրառելով ստացվածի նկատմամբ $\mathbf{I}+\mathbf{R}$ օպերատորը՝ կհանգենք.

$$\frac{\partial \alpha_2(x,\tau)}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2(x,\tau)}{\partial \tau} = K(x,0)\alpha_2(0,\tau) + \int_0^\tau R(x,s,\tau) K(s,0)\alpha_2(0,\tau) ds =$$

$$= \alpha_2(0,\tau)\left[K(x,0) + \int_0^\tau R(x,s,\tau)K(s,0) ds\right]:$$

Ըստ (D)-ի՝

$$\frac{\partial \alpha_2(x,\tau)}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2(x,\tau)}{\partial \tau} = \alpha_2(0,\tau)\cdot \alpha_1(x,\tau): \qquad (2.6)$$

Այժմ (D)-ի IV հավասարումը ածանցենք նախ՝ ըստ t -ի.

$$\frac{\partial \beta_2(t,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial K(\tau,t)}{\partial t} + \int_0^\tau \beta_2(s,\tau) \frac{\partial K(s,t)}{\partial t} ds :$$

Քանի որ $\frac{\partial K(s,t)}{\partial t} = -\frac{\partial K(s,t)}{\partial s}$, հաշվի առնելով սա և մասերով ինտեգրելով՝

$$\frac{\partial \beta_2(t,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial K(\tau,t)}{\partial t} + \int_0^\tau K(s,t) \frac{\partial \beta_2(s,\tau)}{\partial s} ds + \beta_2(0,\tau)K(0,t) - \beta_2(\tau,\tau)K(\tau,t):$$

Ապա (D)-ի IV հավասարումն ածանցենք՝ ըստ τ -ի.

$$\frac{\partial \beta_2(t,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial K(\tau,t)}{\partial \tau} + \int_0^{\tau} K(s,t)\frac{\partial \beta_2(s,\tau)}{\partial \tau}ds + \beta_2(\tau,\tau)K(\tau,t):$$

Գումարելով կստանանք.

$$\frac{\partial \beta_2(t,\tau)}{\partial t} + \frac{\partial \beta_2(t,\tau)}{\partial \tau} - \int_0^{\tau}\left(\frac{\partial \beta_2(s,\tau)}{\partial s} - \frac{\partial \beta_2(s,\tau)}{\partial \tau}\right)K(s,t) = \beta_2(0,\tau)K(0,t):$$

Օպերատորական տեսքով՝

$$(\mathbf{I} - \mathbf{K})\left(\frac{\partial \beta_2(t,\tau)}{\partial t} + \frac{\partial \beta_2(t,\tau)}{\partial \tau}\right) = \beta_2(0,\tau)K(0,t):$$

Կիրառելով $\mathbf{I}+\mathbf{R}$ օպերատորը՝ կստանանք.

$$\frac{\partial \beta_2(t,\tau)}{\partial t} + \frac{\partial \beta_2(t,\tau)}{\partial \tau} = \beta_2(0,\tau)\cdot \beta_1(t,\tau): \qquad (2.7)$$

Ստացված (2.3), (2.6), (2.7) բանաձևերը կոչվում են Կրեյն-Լևինսոնի բանաձևեր: Դրանց առավելությունն այն է, որ ավելի հեշտ են ենթարկվում դիսկրետիզացիայի:

Այսպիսով, խնդիրը լուծելու համար կարելի է $\alpha_i(x)$, $\beta_i(t)$ ֆունկցիաները որոշել դիսկրետիզացիայի միջոցով, այնուհետև լուծել (B) դիֆերենցիալ հավասարումը:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Нерсесян А.Б., Папоян А.А., Построение матрицы, обратной сумме матриц Теплица и Ганкеля. Изд. АН Арм. ССР, Математика XVIII, N 2, 1983, 150-160 с.
2. Kailath T., Ljung L., Morf M., Generalized Krein-Levinson Equations for Efficient Calculation of Fredholm Resolvents of Nondisplacement Kernels. Topics in Functional Anal. Advances in Math. Suppl. Studies, 3, 1978, 169-183 с.

Обращение интегральных операторов с разностным ядром

Папоян Артик
Мхитарян Варужан

Резюме

Ключевые слова: *интегральные уравнения Фредгольма II рода, резольвента, ядро, дифференциальное уравнение, частное производное, формулы Крейна-Левинсона*

Нахождение резольвентных ядер интегральных операторов уравнений Фредгольма II рода дискретным методом связано с многочисленными операциями. При решении дискретных вариантов в общем случае требуется выполнить порядка $O(n^3)$ элементарных операций.

В статье приведен интегральный оператор, даны области определения переменных и ядра, зависящей от разности переменных, сформулированы прямое и обратное предложения. Согласно им, ядро удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными. Затем интегральный оператор представлен с помощью обратного оператора. Резольвента удовлетворяет определенным уравнениям, представленным в статье. Далее формулирована теорема, согласно которой резольвентные ядра интегральных уравнений, при зависимости ядер от разности переменных, удовлетворяют неоднородному дифференциальному уравнению с частными производными, в правую часть которой входят значения резольвенты в краевых точках.

Для доказательства теоремы были дифференцированы соответствуюшие уравнения, которые удовлетворяют резольвенту, а затем интегрированы по частям. После определенных преобразований было получено уравнение, которое было представлено в операторной форме. К последнему был применено обратный оператор, полученное выражение было преобразовано. В результате была получена система уравнений, и закончено доказательство теоремы.

Для получения уравнений Крейна-Левинсона следовали известному из литературы методу. Для нахождения краевых значений резольвенты верхний предел интеграла считали переменной, и, следуя логике первой части работы, их свели к дифференциальным уравнениям. Соответствующие дискретные варианты требуют уже $O(n^2)$ элементарных операций.

Inversion of Integral Operators with Non-Displacement Kernels

Papoyan Artik
Mkhitaryan Varuzhan

Summary

Key words: *Fredholm integral equations of second kind, resolvent, kernel, differential equation, partial derivative, Krein-Levinson formulae*

Finding of resolvent kernels of integral operators for Fredholm second kind equations with discretization method needs multiple operations. While solving discret alternates in general demands to fulfill $0(n^3)$ elementary operations.

In this paper we represent integral operator, domains of variables and kernel. For the case, when the kernel depends of the variable difference, we have formulated straight and inverse proposal, according which the kernel satisfies an equation with partial differentials. Then integral operator has been represented with inverse operator. The resolvent satisfies some equations which we represent in this paper. Then we have formulated theorem, according to which resolvental kernels of integral operators, when being dependant on the difference of variables, will satisfy inhomogeneous differential equation, with partial differentials. In the right part of this equation we have the valuer of resolvent of endpoints.

For the demonstration of theorem we have differented the corresponding equations, which satisfy resolvent, and then we have integrated them by parts. After definite conversions we obtain an equation, and represent in operator form. For the last equation we apply reciprocal operator, and obtain a system of equations. So we complete the demonstration of the theorem.

So as to obtain Krein-Levinson formulae, we have followed a method, which is known from literature. In order to find endpoints of resolvent, the upper limit of integral we take as a variable, and following the idea of previous section, reduce to differential equations. The discret alternative of this demands $0\ (n^2)$ elementary operations.