Որոշ մաթեմատիկական մեթոդների կիրառման արդյունավետությունը ֆիզիկական խնդիրների լուծման ժամանակ

Թորոսյան Նելլի
Հարությունյան Գոհար

Հանգուցային բառեր. *ֆիզիկական խնդիրներ, մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդ, մաթեմատիկական մոդելավորում, ադեկվատ մաթեմատիկական ապարատ, Կոշիի անհավասարություն, ֆունկցիայի առավելագույն և նվազագույն արժեք*

Ֆիզիկայի ուսուցման արդյունավետության բարձրացման ուղիները բազմաթիվ են, սակայն դրանցում առանձնահատուկ տեղ են զբաղեցնում այնպիսիները, որոնք վերաբերում են մաթեմատիկական մեթոդների կիրառմանը: Դա բացատրվում է նրանով, որ մաթեմատիկային բնորոշ է ունիվերսալություն և միևնույն հավասարումը կամ բանաձևը կարող է նկարագրել միմյանցից միանգամայն տարբեր ֆիզիկական երևույթներ: Ֆիզիկայի ուսուցման գործընթացում մաթեմատիկական ապարատի ընտրության պրոբլեմը կապվում է դիդակտիկայի հիմնարար սկզբունքներից մեկի՝ մատչելիության սկզբունքի հետ [3,26]: Ընտրված ադեկվատ մաթեմատիկական ապարատը մի կողմից պետք է համապատասխանի մատչելիության դիդակտիկական սկզբունքին, մյուս կողմից տեսական հարցերի շարադրման և ֆիզիկական խնդիրների լուծման ընթացքում ապահովի բացահայտելու ֆիզիկական պրոցեսների և երևույթների հիմքում ընկած օրինաչափությունները:

Ֆիզիկայի ուսուցման գործընթացում մաթեմատիկական ապարատի ունիվերսալությունն ունի մեծ նշանակություն, քանի որ այն հնարավորություն է տալիս ֆիզիկական իրադրությունը քննարկել ամբողջական, բացատրման գործընթացը իրականացնել առավել ընդհանուր մոտեցմամբ և հիմնավորել ֆիզիկական օրենքների միասնությունը:

Օրինակ, բացի էներգիայի պահպանման օրենքից մեխանիկայի բոլոր օրենքների ունիվերսալ տեսքը վեկտորականն է, որոնցով արտահայտվում են այդ օրենքները: Մեխանիկական հավասարումների հենց այդ տեսքը, ինչպես նաև տարածության և ժամանակի երկրաչափական հատկությունների վրա հիմնված գաղափարները, թույլ են տալիս իրականացնել ամբողջ մեխանիկայի դասընթացի ուսումնասիրումը վեկտորական պատկերացումներով: Վերջինս սովորողների մոտ աստիճանաբար ձևավորում է ֆիզիկական երևույթների ուսումնասիրմանը ընդհանուր մեթոդաբանական մոտեցումներ ցուցաբերելու և առավել ընդհանուր տեսանկյունից կոնկրետ իրադրությունը վերլուծելու ունակություններ:

Ընտրված ադեկվատ մաթեմատիկական ապարատը հանդիսանում է ֆիզիկայի տարբեր բաժիններից սովորողների գիտելիքների ընդհանրացման արդյունավետ միջոց, որը թույլ է տալիս միասնականության մեջ տեսնել ընդհանուրը և ընդհանուրի տեսանկյունից գնահատել առանձնահատուկը: Շրջապատող աշխարհի երևույթների ուսումնասիրման ժամանակ ընդհանուրի, առանձնահատուկի և միասնականի վեր հանումը օգնում է սովորողներին կոնկրետ խնդիրների լուծման ժամանակ ձեռնպահ մնալ կամայական ոչ ռացիոնալ մեթոդների և բանաձևերի ընտրությունից:

Չի կարելի ասել, որ մաթեմատիկական մեթոդներն ամբողջությամբ և արդյունավետ կիրառվում են ֆիզիկայի ուսուցման ժամանակ: Օրինակ, ֆիզիկական խնդիրների լուծման ժամանակ քիչ են կիրառվում այնպիսի մաթեմատիկական մեթոդներ, որոնք թույլ են տալիս որոշել այս կամ այն ֆիզիկական մեծության առավելագույն և նվազագույն արժեքները տարբեր պրոցեսներում և երևույթներում: Վերջիներս հիմնված են ոչ թե ֆունկցիայի ածանցյալի գաղափարի կիրառման վրա այլ հանրահաշվական և երկրաչափական պարզագույն հավասարությունների և անհավասարությունների, ինչպես նաև նրանց ադեկվատ երկրաչափական պատկերացումների վրա: Այդպիսի մոտեցման դեպքում հնարավոր է լինում առավելագույն և նվազագույն արժեքի որոնման վերաբերյալ խնդիրները լուծել նաև ուսուցման առաջին աստիճանում, երբ դեռևս մաթեմատիկայի դասընթացից նրանց հայտնի չէ ածանցյալի գաղափարը:

Ֆիզիկայի դասընթացում խնդիրների լուծման և տեսական բացատրության ժամանակ գրեթե չի կիրառվում մաթեմատիկայի դասընթացից սովորողներին հայտնի մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը, մինչդեռ վերջինս հանդիսանում է ապացուցման բավականին հուսալի մեթոդ: Ֆիզիկական հավասարումների վեկտորական տեսքը և նրանց վեկտորա-գրաֆիկական ինտերպրետացիան, որի տակ հասկանում ենք վեկտորական հավասարումների ներկայացումը երկրաչափական պատկերների միջոցով, թույլ են տալիս շատ խնդիրների լուծումը դարձնել առավել հեշտ և պատկերավոր: Վերոհիշյալը և այլ մաթեմատիկական մեթոդների լայն կիրառումը թույլ են տալիս ֆիզիկայի ուսուցումը դարձնել առավել հետաքրքիր և ի ցույց դնել ֆիզիկայի ուսուցման ժամանակ երևույթների և պրոցեսների մաթեմատիկական մոդելավորման լայն հնարավորությունները:

Աշխատանքի նպատակն է մի քանի ֆիզիկական խնդիրների լուծման օրինակով ցույց տալ, թե որքան արդյունավետ կարող է լինել մաթեմատիկական մեթոդների լայն կիրառումը ֆիզիկական խնդիրների լուծման ժամանակ:

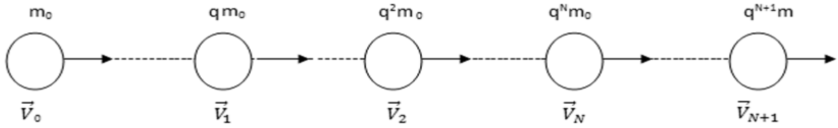
Օրինակի համար քննարկենք հետևյալ խնդիրը, որի լուծման համար կկիրառենք մաթեմատիկական ապացույցներից առավել կատարելագործված մեթոդներից մեկը՝ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը: Այդ դեպքում լավ հնարավորություն է առաջանում արագ լուծել խնդիրը՝ վեր հանելով նրա ֆիզիկական էությունը:

Խնդիր 1.

Ունենք N անշարժ գնդիկներ, որոնց զանգվածները կազմում են q հայտարարով երկրաչափական պրոգրեսիա: m_oզանգվածով առաջին գնդիկը V_o արագությամբ բացարձակ առաձգական հարվածում է երկրորդին, վերջինս՝ երրորդին և այդպես շարունակ: Որոշել N-րդ գնդիկի արագությունը: Հարվածները համարել կենտրոնական, շփումը հաշվի չառնել [4, 69]:

Լուծում.

Կիրառենք իմպուլսի և լրիվ մեխանիկական էներգիայի պահպանման օրենքներն առաջին մի քանի գնդիկի համար, և ստացված օրինաչափությունից գրենք բանաձևը N-րդ գնդիկի արագության համար (Նկ.1):



Նկար 1. Խնդիր 1-ի սխեմատիկ պատկերը

m_o և qm_o զանգվածով գնդիկների համար ունենք.

$$\begin{cases} m_0\overrightarrow{V_0} = m_0\overrightarrow{V_0'} + qm_0\overrightarrow{V_1} \\ \dfrac{m_0V_0^2}{2} = \dfrac{m_0V_0'^2}{2} + \dfrac{qm_0V_1^2}{2} \end{cases} \qquad (1)$$

Որտեղ $\vec{V}'_0$ և $\vec{V}_1$ համապատասխանաբար m_o և qm_o զանգվածով գնդիկների արագություններն են միմյանց հարվածից հետո:

Լուծենք (1) համակարգը q<1 դեպքի համար, կստանանք.

$$V_1 = \frac{2}{1+q} \cdot V_0 \qquad (2)$$

Համանման ձևով երկրորդ գնդիկի արագության համար կստանանք.

$$V_2 = \left(\frac{2}{1+q}\right)^2 \cdot V_0 \qquad (3)$$

(2) և (3) բանաձևերից կարելի է եզրակացնել, որ N-րդ գնդիկի արագությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$V_N = \left(\frac{2}{1+q}\right)^N \cdot V_0 \qquad (4)$$

N-րդ գնդիկի համար (4) արտահայտությունը ստանանք՝ կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը:

(4) բանաձևի ճիշտ լինելը մենք արդեն ստուգեցինք N=1 և N=2 դեպքերի համար: Այժմ ենթադրենք, որ (4) բանաձևը ճիշտ է նաև N-րդ գնդիկի համար և ապացուցենք, որ այն մնում է հավաստի նաև (N+1)-րդ գնդիկի համար:

Պարզվում է, որ դրա համար բավական է քննարկել միայն վերջին երկու՝ N-րդ և (N+1)-րդ գնդիկների համակարգը: Նրանց համար նորից գրենք իմպուլսի և լրիվ մեխանիկական էներգիայի պահպանման օրենքները:

$$\begin{cases} q^N \cdot m_0 \cdot \overrightarrow{V_N} = q^N \cdot m_0 \cdot \overrightarrow{V_N'} + q^{N+1} \cdot m_0 \cdot \vec{V}_{N+1} \\ q^N \cdot m_0 \cdot \dfrac{V_N^2}{2} = q^N \cdot m_0 \cdot \dfrac{V_N'^2}{2} + q^{N+1} \cdot m_0 \cdot \dfrac{V_{N+1}^2}{2} \end{cases} \qquad (5)$$

որտեղ $\vec{V}'_N$ N-րդ գնդիկի արագությունն է N+1 գնդիկի հարվածելուց հետո, ոչ բարդ ձևափոխություններից հետո կստանանք.

$$\begin{cases} V_N = V'_N + q \cdot V_{N+1} \\ V_N^2 = V'^2_N + q \cdot V_{N+1}^2 \end{cases} \quad (6)$$

Որտեղից արտաքսելով V'_N ՝ կստանանք.

$$V_{N+1} = \frac{2}{1+q} \cdot V_N \quad (7)$$

Հաշվի առնելով (4)-ը՝ վերջնական կստանանք.

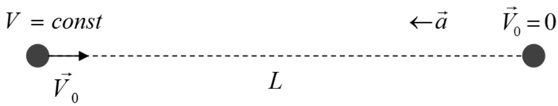
$$V_{N+1} = \left(\frac{2}{1+q}\right)^{N+1} \cdot V_0 \quad (8)$$

Հետաքրքիր է նշել, որ (4) բանաձևը մնում է ճշմարիտ նաև այն դեպքում, երբ q>1-ից: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր գնդիկ հարվածից հետո փոխում է ուղղությունը և շարժվում հակառակ ուղղությամբ: Իսկ q=1 դեպքում բոլոր գնդիկները ունեն նույն զանգվածը, և (4) բանաձևից ստանում ենք $V_N = V_0$: Իրականում այդ դեպքում գնդիկները փոխանակվում են արագություններով, և յուրաքանչյուր գնդիկ, հարվածելով հաջորդին, կանգ է առնում, իսկ վերջինս ձեռք է բերում V_0 արագություն:

Հաջորդ երկու խնդիրների լուծման ավանդական մոտեցման ժամանակ անհրաժեշտություն է առաջանում ֆունկցիայի արտահայտությունը ածանցել, որ գտնենք այս կամ այն ֆիզիկական մեծության առավելագույն կամ նվազագույն արժեքը: Սակայն այն պարզ կապը, որը գոյություն ունի երկու մեծությունների միջին հանրահաշվականի և միջին երկրաչափականի միջև՝ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ թույլ է տալիս, խուսափել ածանցումից և բարդ մաթեմատիկական հաշվարկներից: Այդ անհավասարման ձախ մասը ընդունում է իր նվազագույն արժեքը, երբ $a = b$:

Խնդիր 2.

Մասնիկը դուրս է թռչում աղբյուրից հաստատուն արագությամբ և անցնում L ճանապարհ, այնուհետև արգելակում a արագացմամբ: Մասնիկի ի՞նչ արագության դեպքում դուրս գալու պահից մինչև կանգ առնելը մասնիկի շարժման ժամանակը կլինի նվազագույնը (նկ. 2) [2, 15]:



Նկար 2. Խնդիր 2-ի սխեմատիկ պատկերը

Ներկայացնենք այս խնդրի լուծման 2 տարբերակներ, որոնցում չի կիրառվում ածանցյալի գաղափարը:

Տարբերակ 1.

Մինչև մասնիկի կանգ առնելը շարժման ժամանակը հավասար է.

$$t = \frac{L}{V} + \frac{V}{a} \qquad (1)$$

Ստանդարտ մոտեցման դեպքում ժամանակի փոքրագույն արժեքը որոշելու համար անհրաժեշտ է կամ V-ի նկատմամբ լուծել քառակուսային հավասարումը, որն ստացվում է (1) արտահայտությունից, այնուհետև տարբեր դատողություննե-րի օգնությամբ ստանալ պատասխանը, կամ էլ (1)-ին հավասարումն ածանցել, ըստ V-ի և ստացած արտահայտությունը հավասարեցնել 0-ի՝ գտնելով t_{min}: Խնդիրը կարելի է լուծել ավելի հեշտ համաձայն վերոհիշյալ անհավասարության, ունենք՝

$$t = \frac{L}{V} + \frac{V}{a} \geq 2\sqrt{\frac{L}{a}} \qquad (2)$$

t ժամանակը կլինի նվազագույնը՝ երբ $\frac{L}{V} = \frac{V}{a}$, որտեղից $V = \sqrt{aL}$:

Տարբերակ 2.

$$t = t_1 + t_2 = \frac{L}{V} + \frac{V}{a} \geq 2\sqrt{\frac{L}{a}}\,,\ \frac{L}{V} = \frac{V}{a}\,,\ V = \sqrt{aL}$$

$$t = \frac{La + V^2}{Va}\,,\ V^2 - atV + La = 0\,,\ V = \frac{at \pm \sqrt{a^2t^2 - La}}{2}$$

Սա տեղի ունի, երբ $a^2t^2 - 4La \geq 0$,

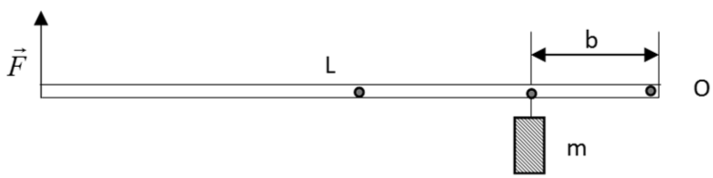
t-ն կլինի մինիմալ $a^2t^2 - 4La \geq 0$ դեպքում, որտեղից $t_{\min} = \sqrt{\frac{4L}{a}}$

Պատ.՝ $V = \sqrt{a \cdot L}$

Խնդիր 3.

L երկարությամբ ձողը կարող է պտտվել իր անշարժ O ծայրի շուրջը: O ծայրի կետից b հեռավորության վրա կախված է m զանգվածով բեռը: Ձողը հավասարակշռության մեջ պահվում է դեպի վեր ուղղված F ուժով (նկ. 3): Ձողի մեկ մետրի զանգվածը γ է: Որոշել L-ի որ արժեքի համար F-ի մեծությունը կլինի նվազագույնը [1, 27]:

Գտնել F-ի նվազագույն արժեքը:



Նկար 3.Խնդիր 3-ի սխեմատիկ պատկերը

Լուծում.

Հաշվի առնելով, որ ձողի զանգվածը հավասար է γ · L, իսկ նրա կենտրոնում կիրառված է ծանրության γgL՝ գրենք ձողի հավասարակշռության պայմանը։

$$F\cdot L = mgb + \gamma Lg\cdot\frac{L}{2} \text{ կամ } F = \frac{mgb}{L} + \frac{\gamma Lg}{2}$$

Համաձայն Կոշի անհավասարության՝ F-ը կլինի նվազագույնը, երբ

$$\frac{mgb}{L} = \frac{\gamma Lg}{2},$$

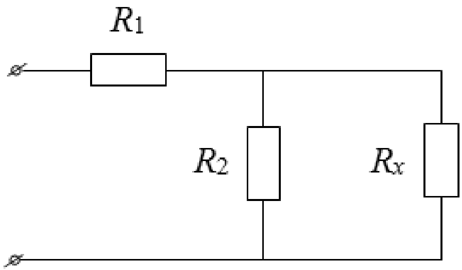
որտեղից

$$L = \sqrt{\frac{2mb}{\gamma}},$$

$$F_{\min} = g\sqrt{2mbg}$$

Խնդիր 4.

Պատկերված շղթայում (նկ. 4) R_x դիմադրության ի՞նչ արժեքի դեպքում նրա վրա հզորությունը կլինի առավելագույնը։ Աղբյուրի սեղմակներում լարումը հաստատուն է։



Նկար 4. Խնդիր 4-ի էլեկտրական շղթան

Լուծում.

Ոչ բարդ հաշվարկներից հետո R_x դիմադրության վրա լարման անկման համար կունենանք.

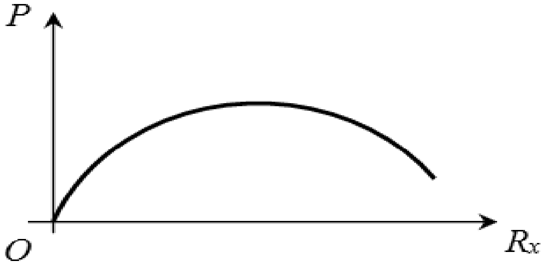
$$U_x = \frac{UR_2R_x}{R_1R_2 + R_x(R_1+R_2)} \quad (1)$$

Հետևաբար նրա վրա անջատված հզորությունը հավասար է.

$$P_x = \frac{U^2R_2^2R_x}{[R_1R_2 + R_x(R_1+R_2)]^2} \text{ կամ } P_x = \frac{U^2R_2}{\left[\frac{R_1R_2}{\sqrt{R_x}} + \sqrt{R_x}(R_1+R_2)\right]^2} \quad (2)$$

Հզորության առավելագույն P_x արժեքը գտնելու համար կարելի է խուսափել (2) հավասարումի ածանցումից։ Դժվար չէ նկատել, որ R_x= 0 և $R_x \to \infty$ դեպքերում $P_x \to 0$։

Հաշվի առնելով խնդրի ֆիզիկական էությունը դա նշանակում է $P = P(R_x)$ կախվածության գրաֆիկը (նկ. 5) ունի առավելագույն արժեք:



Նկար 5. $P = P(R_x)$ ***կախվածության գրաֆիկը***

Ակնհայտ է, որ առավելագույն հզորությունը համապատասխանում է (2) արտահայտության հայտարարի նվազագույն արժեքին, որը տեղի ունի, երբ

$$\frac{R_1R_2}{\sqrt{R_x}} = \sqrt{R_x}\left(R_1 + R_2\right)$$

որտեղից ստացվում է

$$R_x = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

Այսպիսով, ֆիզիկական խնդիրների լուծման ժամանակ մաթեմատիկական (հանրահաշվական և երկրաչափական) մեթոդների լայն կիրառումը թույլ է տալիս ոչ միայն իրականացնել սովորողների գիտելիքների փոխանցում մաթեմատիկայի դասընթացից ֆիզիկայի դասընթաց, այլ նաև ֆիզիկական երևույթների բազմազանության մեջ գտնել մաթեմատիկական մոդելավորման տարբեր ձևեր: Վերջինս թույլ է տալիս սովորողների մոտ զարգացնել ֆիզիկական և մաթեմատիկական մոդելավորում իրականացնելու հմտություններ և զարգացնել նրանց մոտ ստեղծագործական նոր ունակություններ:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Գրիգորյան Գ., Փախչանյան Բ.. Ֆիզիկայի հանրապետական օլիմպիադաներ (1983-2003)-Եր.: ՄՀՄ գրատուն, 2016, 224 էջ:
2. Վորոբյով Ի.Ի., Զուբկով Պ.Ի. և այլք //Օ.Յա. Սավչենկոյի խմբագրությամբ//. Ֆիզիկայի խնդիրներ: Ուսումնական ձեռնարկ, Եր., Տիգրան Մեծ, 2008, 528 էջ:
3. Кондратьев А.С., Прияткин Н.А., Современные технологии обучения физике: Учебное пособие. - СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006, 342 с.
4. Цатурян А.М., Современные технологии организации обобщающего повторения школьного курса физики. Монография/ А.М. Цатурян. – Ванадзор. СИМ ТПАГРАТУН, 2013, 106 с.

Продуктивность использования некоторых математических методов при решении задач по физике

Торосян Нелли
Арутюнян Гоар

Резюме

Ключевые слова: *задачи по физике, метод математической индукции, математическое моделирование, адекватный математический аппарат, неравенство Коши, максимальное и минимальное значение функции*

В работе на примере решения нескольких задач по физике показано, насколько продуктивным может быть широкое использование математических методов при решении этих задач. В частности, при решении данных задач на стадии математического моделирования был использован один из усовершенствованных методов математического доказательства – метод математической индукции и известное неравенство Коши. Использование последних позволяет рассматривать такого рода задачи и на первых ступенях обучения, когда еще учащимся неизвестно понятие производной функции из курса математики. Показана, что в отдельных случаях, характерная для математических методов универсальность, позволяет рассматривать физические ситуации более целостно, доступно и с достаточной математической строгостью.

Разнообразие математических методов, которые проявляются при выборе адекватного математического аппарата, позволяют развивать у учащихся элементы толерантного мышления и творческие способности. В отдельных случаях они позволяют учащимся развивать у них стремление замечать простое и доступное. Последнее приводит их к чувственному восприятию, что может стимулировать эстетическое воспитание учеников.

The Effectiveness of Some Mathematical Methods in Solving Physical Problems

Torosyan Nelli
Harutyunyan Gohar

Summary

Key words: *tasks in physics, mathematical induction method, mathematical modeling, adequate mathematical machine, Cauchy Inequality, the maximum and minimum value of the function*

Highlighting the role of the mathematical apparatus during describing the physical phenomena and processes, by means of the examples of solving several physical problems, the effectiveness of wide application of mathematical methods is illustrated in the article. In particular, in the mathematical modeling phase of solving the problems discussed, one of the most advanced mathematical methods proofs that the mathematical induction method and famous Cauchy Inequality have been applied.

Besides, the variety of mathematical methods, which appears during the selection of adequate mathematical apparatus, allows to develop in learners elements of tolerant thinking and creative abilities. In some cases, these are the basis for the learners to develop and appreciate the aspiration of seeing that which is simple and affordable. The latter puts forward in them a sensual and emotional field, which can stimulate the learners' aesthetic education.